

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月31日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2008 ～ 2011

課題番号：20340028

研究課題名（和文）

完全 WKB 解析に拠る高階パルヴェ方程式の構造論

研究課題名（英文）

Structure theory of higher order Painlevé equations through exact WKB analysis

研究代表者

河合 隆裕 (KAWAI TAKAHIRO)

京都大学・数理解析研究所・名誉教授

研究者番号：20027379

研究成果の概要（和文）：

1. 高階パルヴェ方程式 $(P_J)_m$ ($J=I, II, IV; m=1, 2, \dots$) に対し、その1型変わり点の近くにおいて、そのインスタントン型解は2階I型パルヴェ方程式の解に変換できることを示した。議論は高階パルヴェ方程式の背後に在るシュレーディンガー方程式の WKB 解析的・半大域の変換論に基づく。

2. その WKB 解析的標準型がマシュー方程式となる一連の方程式の変換論を構築し、その WKB 解の解析的構造を超局所解析的手法により明らかにした。

研究成果の概要（英文）：

1. Near a turning point of type 1 of a higher order Painlevé equation $(P_J)_m$ ($J=I, II, IV; m=1, 2, \dots$) each instanton-type solution of $(P_J)_m$ is transformed to a solution of the second order Painlevé equation $(P_I)_1$. The proof makes essential use of the semi-global WKB theoretic transformation of the Schrödinger equation that underlies $(P_J)_m$.

2. We have studied a class of Schrödinger equation whose WKB-theoretic canonical form is an algebraic Mathieu equation, and the analytic structure of WKB solutions of such equations is clarified by microlocal analysis.

交付決定額

(金額単位：円)

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|--------|-----------|-----------|------------|
| 2008年度 | 2,200,000 | 660,000 | 2,860,000 |
| 2009年度 | 2,100,000 | 630,000 | 2,730,000 |
| 2010年度 | 2,000,000 | 600,000 | 2,600,000 |
| 2011年度 | 2,000,000 | 600,000 | 2,600,000 |
| 年度 | | | |
| 総計 | 8,300,000 | 2,490,000 | 10,790,000 |

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：高階パルヴェ方程式、インスタントン型解、単純極作用素、fixed singularities、完全 WKB 解析、超局所解析、解析的 S -行列、3 粒子閾値

1. 研究開始当初の背景

1980年代に物理学者 A. Voros と化学者 H. Silverstone の提出した“WKB 解をボレル総和して考える”と云うアイデア（その根底には Bender - Wu の論文 (Phys. Rev., **184** (1969))

が在ったと思われる) は、ボレル変換と云うフィルターを通すことにより漸近解析であった WKB 解析が「完全」なものとなることにつながった。さらに物理学科出身の F. Pham が Voros の仕事と J. Ecalle の再生函数論を

関係付けることに成功した。このような仏・米での活動に刺戟を受けて、我々はさらにこれ等の研究に超局所解析学の視点からの考察も加えて「完全 WKB 解析」による微分方程式の構造の解明を試みてきた。このような流れを引き継いで、本計画では一つの重点を高階パルヴェ方程式の構造の研究に置き、高階パルヴェ方程式の背後に在るシュレーディンガー方程式の完全 WKB 解析の有用性を示すことを目標と定めるに至った。

2. 研究の目的

1. 高階パルヴェ方程式の構造の研究

を、その背後に在る、シュレーディンガー方程式とその変形方程式から成る過剰決定系の完全 WKB 解析により進める。この為には

2. 完全 WKB 解析の理論の深化

が必要と考えられるが、特に

3. その超局所解析学との関連

に注目して考察する。さらに多時間パルヴェ方程式 (ガルニエ系) の背後に在る線型微分方程式系の解析を念頭に置きつつ

4. 大きなパラメタを含む極大過剰決定系の完全 WKB 解析

にも取り組む。

3. 研究の方法

我々の方法の特長は、WKB 解のボレル変換をボレル平面上での、パラメタ付の多価解析関数と捉えて、その超局所解析を行う点に在る。特に、シュレーディンガー方程式の「変換」に用いられる変換級数をボレル変換して定まる超局所微分作用素 \mathcal{L} が次のような積分表示を持つことは重要である：

$$\mathcal{L}\phi_B = \int_{y_0}^y K(x, y-y', d/dx) \times \log(y-y') \phi_B(x, y') dy'$$

但しここで K は $(y-y')$ に正則に依存する、 x に関する無限階微分作用素。

4. 研究成果

1. 河合と竹井が協力して「高階パルヴェ方程式 $(P_J)_m$ ($J=I, II, IV; m=1, 2, \dots$) に対し、その 1 型変わり点の近くにおいて、そのインスタントン型解は古典的な I 型パルヴェ方程式」の解に変換できる」と云う結果を公刊した。(Publ. RIMS, **47** (2011), 153–219)

2. WKB 解の特異性に関しては単純極が単純変わり点と類似の効果を持つことに注目して、対象とする方程式を「変わり点 2 個のシュレーディンガー方程式」から大きく拡張 (最終的には単純極 2 個と単純変わり点 1 個を持つシュレーディンガー方程式迄対象とすることに成功している)、さらにその WKB 解の「動かない特異点」の近傍での挙動を超

局所解析的手法により解明した。(RIMS Preprint **1735** (2011))

3. これ等の結果について河合が 2011 年 8 月に A. Weinstein 教授 (UC バークレー) のセミナーで総合報告を行い、幸いにして好評であった。

4. 完全 WKB 解析の出発点の一つである Bender-Wu の論文 (Phys. Rev., **184**(1969)) が元来場の量子論の解析を念頭に置いていることに鑑み、解析的 S -行列論の権威者 H. P. Stapp 教授 (ローレンス・バークレー国立研究所) と河合が、“ S -行列の摂動展開に完全 WKB 解析を適用する際にまず取り組むべき主題は?” と云う形の問題設定の下に議論し“長らく懸案の 3 粒子閾値 (3-particle threshold) 近くの S -行列の構造を、trussbridge diagram 関数のボレル和として考えてみよう”と云う共通認識を持つに到った。この方向の研究は超局所解析学に新しい動きを惹起している。(例えば平成 24 年 10 月の数理解析研究所 研究集会「Recent development of microlocal analysis and asymptotic analysis」での反応等。)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

- ① S. Kamimoto, T. Kawai, T. Koike and Y. Takei, Microlocal analysis of fixed singularities of WKB solutions of a Schrödinger equation with a merging triplet of two simple poles and a simple turning point, The Mathematical Legacy of Leon Ehrenpreis, 1930–2010, Springer, 査読有, 2012, 125–150, DOI:10.1007/978-88-470-1947-8-9
- ② 河合隆裕、超局所解析的 S 行列論、数理物理 私の研究、丸善出版、査読有、2012、147–152、<http://puh.maruzen.co.jp>
- ③ S. Kamimoto, T. Kawai, and Y. Takei, Exact WKB analysis of a Schrödinger equation with a merging triplet of two simple poles and one simple turning point, RIMS Preprint, 査読無, 1735, 2011, 1–216, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/preprint/file/RIMS1735.pdf>
- ④ S. Kamimoto, T. Kawai, T. Koike and Y. Takei, On a Schrödinger equation with a merging pair of a simple pole and a simple turning point – Alien calculus of WKB solutions through

- microlocal analysis, Asymptotics in Dynamics, Geometry and PDEs; Generalized Borel Summation, Scuola Normale Superiore Pisa, 査読有, II, 2011, 245–254, DOI:10.1007/978-88-7642-377-2_4
- ⑤ Y. Takei, On the turning point problem for instanton-type solutions of Painlevé equations, *ibid.*, 査読有, II, 2011, 255–274, DOI:10.1007/978-88-7642-377-2_5
- ⑥ T. Kawai, T. Koike and Y. Takei, On the exact WKB analysis of higher order simple-pole type operators, *Adv. in Math.*, 228, 2011, 63–96, DOI:10.1016/j.aim.2011.05.010
- ⑦ T. Koike and Y. Takei, On the Voros coefficient for the Whittaker equation with a large parameter—Some progress around Sato’s conjecture in exact WKB analysis, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 査読有, 47, 2011, 375–395, DOI:10.2977/PRIMS/39
- ⑧ T. Kawai, and Y. Takei, WKB analysis of higher order Painlevé equations with a large parameter. II. Structure theorem for instanton-type solutions of $(P_J)_m$ ($J=I, 34, II-2$ or IV) near a simple P -turning point of the first kind, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 査読有, 47, 2011, 153–219, DOI:10.2977/PRIMS/34
- ⑨ T. Kawai, T. Koike and Y. Takei, On the structure of higher order simple-pole type operators in exact WKB analysis, *Funkcial. Ekvac.*, 査読有, 53, 2010, 249–276, DOI:10.1619/fesi.53.249
- ⑩ S. Kamimoto, T. Kawai, T. Koike and Y. Takei, On the WKB theoretic structure of a Schrödinger operator with a merging pair of a simple pole and a simple turning point, *Kyoto J. of Math.*, 査読有, 50, 2010, 101–164, DOI:10.1215/0023608X-2009-007
- ⑪ T. Aoki, T. Kawai, and Y. Takei, The Bender-Wu analysis and the Voros theory. II., *Advanced Studies in Pure Math.*, 査読有, 54, 2009, 19–94, DOI, httpなし
- [学会発表] (計22件)
- ① Tatsuya Koike, On the Borel summability of solutions of one-dimensional Schrödinger equations and related topics in exact WKB analysis、研究集会「Borel 総和法と接続問題」(招待講演)、2012年3月6日、7日、広島大学
- ② 神本晋吾、非線形常微分方程式の 0-parameter 解の Borel 総和可能性に関して、研究集会「Borel 総和法と接続問題」(招待講演)、2012年3月6日、広島大学
- ③ Yoshitsugu Takei、Exact WKB analysis of second-order non-homogeneous linear differential equations — Bifurcation integral and Borel summability —、数理解析研究所研究集会「漸近解析に於ける超局所解析の展望」(招待講演)、2011年11月18日、京都大学数理解析研究所
- ④ Takahiro Kawai、A survey of the recent development of the exact WKB analysis、A. Weinstein’s seminar (招待講演)、2011年8月30日、University of California at Berkeley (USA)
- ⑤ Yoshitsugu Takei、Parametric Stokes phenomenon and the Voros coefficients for Weber’s equation、Séminaire Equations fonctionnelles (招待講演)、2011年8月30日、ストラスブール大学(フランス)
- ⑥ Takahiro Kawai、Can the Borel resummation build a bridge between the perturbation theory and the analytic S -matrix theory?、H. Stapp’s seminar (招待講演)、2011年8月24日、Lawrence Berkeley National Laboratory (USA)
- ⑦ 竹井義次、微分方程式に対する parametric Stokes phenomenon について、談話会(招待講演)、2011年6月28日、広島大学
- ⑧ Yoshitsugu Takei、Second Painlevé equation vs. Weber equation — An exact WKB approach to the confluence phenomena of simple turning points、International Conference “The 8th Workshop on Linear and Nonlinear Waves” (招待講演)、2010年9月11日、大阪大学理学研究科
- ⑨ Yoshitsugu Takei、An overview on the resurgent analysis of one-dimensional Schrödinger equations、RIMS 共同研究「Exact WKB analysis — Borel summability of WKB solutions」(organizer)、2010年9月8日、京都大学数理解析研究所
- ⑩ Tatsuya Koike、On the Borel summability of WKB solutions、RIMS 共同研究「Exact WKB analysis — Borel summability of WKB solutions」(招待講演)、2010年9月8日、9日、

- 京都大学数理解析研究所
- ⑪ 竹井義次、1次元 Schrödinger 方程式の完全 WKB 解析 — WKB 解の Borel 変換の特異点について —、RIMS 研究集会「可積分系数理の多様性」(招待講演)、2010年8月19日、京都大学数理解析研究所
 - ⑫ Yoshitsugu Takei、Second Painlevé equation vs. Weber equation — On the confluence phenomenon of simple turning points、RIMS 合宿型セミナー「Recent Developments in Resurgence Theory and Related Topics」(招待講演)、2010年7月2日、関西セミナーハウス
 - ⑬ 竹井義次、Painlevé 方程式の変わり点における標準形について、研究集会「第25回松山キャンプ」(一般発表)、2010年1月6日、愛媛県総合社会福祉会館
 - ⑭ Yoshitsugu Takei、Exact WKB analysis for a Schrödinger equation with a merging pair of simple turning points、Functional Equations Seminar(招待講演)、2009年10月27日、ストラスブール大学(フランス)
 - ⑮ Yoshitsugu Takei、On the turning point problem for instanton-type solutions of (higher order) Painlevé equations、International-Conference “Asymptotics in dynamics, geometry and PDEs; generalized Borel summation” (招待講演)、2009年10月16日、E. De Giorgi 数学研究センター(イタリア)
 - ⑯ Yoshitsugu Takei、Summability of formal solutions of PDEs and the geometry of Stokes curves、数理解析研究所研究集会「New development of asymptotic analysis and dynamical systems」(招待講演)、2009年6月19日、京都大学数理解析研究所
 - ⑰ Yoshitsugu Takei、Exact WKB analysis for simple-pole type singularities of Painlevé equations、Mathematical Physics and Geometry Seminar(招待講演)、2009年3月17日、パリ第7大学(フランス)
 - ⑱ Yoshitsugu Takei、On the summability and Stokes phenomena for formal solutions of some PDEs — An exact WKB approach、Differential Equations Seminar(招待講演)、2009年3月13日、アンジェ大学(フランス)
 - ⑲ Yoshitsugu Takei、Transformation theory for MTP equations and singularity structure of the Borel transform of their WKB solutions、合宿型セミナー「Foundations of exact WKB analysis and resurgence theory」

- (organizer)、2008年12月17日、18日、関西セミナーハウス
- ⑳ Yoshitsugu Takei、On the summability and Stokes phenomena for formal solutions of some PDEs — An exact WKB approach、研究集会「解析的な方程式の新しい取り組み」(招待講演)、2008年9月17日、京都大学数理解析研究所
- ㉑ Takahiro Kawai、Yoshitsugu Takei、(兩人講演)、On the Toulouse Project — How much we have understood the structure of solutions of higher order Painlevé equations、Applied Math. Seminar(招待講演)、2008年9月10日、University of Sydney (オーストラリア)
- ㉒ Yoshitsugu Takei、On the exact WKB analysis for the degenerate third Painlevé equation、研究集会「Exact WKB Analysis and Microlocal Analysis」(招待講演)、2008年5月27日、京都大学数理解析研究所

[図書] (計1件)

河合隆裕・竹井義次、岩波書店、特異振動の代数解析学、2008、146
ISBN : 978-4-00-006291-6

6. 研究組織

(1) 研究代表者

河合 隆裕 (KAWAI TAKAHIRO)
京都大学・数理解析研究所・名誉教授
研究者番号 : 20027379

(2) 研究分担者

竹井 義次 (TAKEI YOSHITSUGU)
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号 : 00212019

(3) 連携研究者

小池 達也 (KOIKE TATSUYA)
神戸大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授
研究者番号 : 80324599
青木 貴史 (AOKI TAKASHI)
近畿大学・理工学部・教授
研究者番号 : 80159285

(4) 研究協力者

神本 晋吾 (KAMIMOTO SHINGO)
東京大学・数理科学研究科・院生