様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　25　年　5　月　20　日現在

機関番号：14401
研究種目：基盤研究（B）
研究期間：2008～2012
課題番号：20340034
研究課題名（和文）　平均場方程式で記述される非線形臨界現象の解析的研究

研究課題名（英文）　Analysis for nonlinear critical phenomena described by mean field equations

研究代表者　鈴木　貴(SUZUKI TAKASHI)
大阪大学基礎工学研究科・教授
研究者番号：40114516

研究成果の概要（和文）：
多数の粒子や渦点などの平均場運動を記述する数理モデルには，対象や階層を越えた共通の数学構造が存在する．本研究課題では，スケーリングについて不変な性質をもち，場と見なされる変数を介在した相互作用が変分構造で規定されている一連の非線形偏微分方程式群に着目した．凝縮や平均化など，モデルが記述する現象を厳密に証明し，同時に多種間の相互作用や，強い非線形化での大域的力学系を解明する新しい数学的方法を開拓した

研究成果の概要（英文）：
Several common mathematical structures are found in the models describing the motion of mean field of many particles, point vortices, and so on. In this project we focused on a series of nonlinear partial differential equations provides with scaling invariance, and also variational structure associated with a variable regarded as field. We rigorously proved several phenomena emerged from the model, such as concentration or homeostasis, and at the same time developed new mathematical tools to approach interactions between species and global dynamics under strong nonlinearities

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008年度	2,400,000	720,000	3,120,000
2009年度	1,900,000	570,000	2,470,000
2010年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2011年度	1,900,000	570,000	2,470,000
2012年度	2,100,000	630,000	2,730,000
総　計	10,300,000	3,090,000	13,390,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：スケーリング，双対変分構造，爆発，凝縮，量子化，点渦乱流，走化性，熱弾性

１．研究開始当初の背景

(1)乱流・記憶形状合金・自己相互作用流体・血管新生など,それまでは個別モデルの数学解析がおこなわれ,解の族や時系列において正則性が失われる極限状態が発生し,界面の出現・解の爆発のような本質的に非線形な現象が現れることが明確になっていた.注目したのは，様々な臨界状態の個別モデルを越えた類似性と同時に，統計力学・場の理論・非平衡熱力学などこれらのモデルを導出する基盤の共通性である.このことはモデルの入口と出口,すなわち数理物理学と非線形偏微分方程式論との融合を強く示唆していた.

実際，平均場理論の諸原理から導出された一連の方程式群には，解の挙動を支配する統一的な構造,すなわち双対性に基づく変分構造やスケーリングに対する不変性があった.

(2)空間2次元で指数型非線形性をもつ半線形楕円型方程式（Liouville方程式）において爆発機構の量子化が明確になり,非線形楕円型方程式研究の基盤になっていた.同時に,自己双対ゲージ理論や点渦乱流平均場理論などの数理物理学との接点も指摘され,楕円型方程式に限っては非線形モデルに共通する数学原理が確立されつつあった.

(3)楕円型方程式は放物型方程式の定常状態であり安定性・不安定性を通して力学系を制御している.上記の成果により有限時間爆発も含めた非定常状態の力学系の描像が視界に入ってきた.特に細胞性粘菌の走化性を記述するモデルに着目し，非定常解における爆発機構の量子化を確立するシナリオを構築した.

２．研究の目的

(1)臨界状態を記述する非線形問題では時間やパラメータに依存する方程式の解が有限時刻や定められたパラメータの値を越えて延長できなくなる状況，すなわち解の爆発がおこる．このとき解が空間的に局在化してくる現象を凝縮,凝縮の状態が規格化されたもののコピーの集合となっていることを量子化という．量子化とはエネルギーや質量が規格化される過程である.モデルから熱力学の法則を読み取り，スケーリングを用いた非線形解析学の最新の方法を駆使することによって，どのような理由でどのようなときに爆発機構の量子化が起こるかを明らかにすることを最初の目標とした.

(2)非定常走化性方程式（Smoluchowski-Poisson方程式）における爆発機構の量子化は動力学が定常解全体の構造によって先験的に規定されていることを示している．このことを非線形スペクトル力学という．このパラダイムは異なる背景を持つ様々な問題-a）有限伝搬性拡散に支配される走化性，b）相対論的や非アーベル的な自己双対ゲージ理論,c）相転移・相分離・ヒステリシスなどの臨界現象に関わる熱力学，d）プラズマや星雲など自己相互作用流体や重力場理論，e）乱流の平均場理論 において期待することができる.新しい解析法を工夫することでそれぞれの状況を解決すると同時に，一般的な指針（数学原理）を確立することを目指した.

(3)指数型非線形性をもつ半線形楕円型方程式は，点渦乱流でJoyce-Montgomery他が導出した平均場方程式（Boltzmann-Poisson方程式）と同じものであった．この方程式は粒子（渦度）と場（流れ関数）に関する双対的な変数によって記述されている.渦度場方程式のハミルトニアンに由来する小正準統計から熱力学的関係式を用いて，正準統計に変換して得られるものであるが，逆にこ

の平均場方程式の解の族が爆発するときには，量子化と並行して爆発点が元の渦度場方程式のハミルトニアンの臨界点となる(循環的階層).爆発機構の量子化・非線形スペクトル力学・双対変分構造・循環的階層が様々な数理モデルにおいて成立していることを確認し,非線形数学解析を進展させるばかりではなく，逆に具体的な問題の解決を通して新しい数学原理を発見することを最終的な目標とした.

３．研究の方法

(1)非定常走化性方程式における爆発機構量子化の厳密な証明について代表者が提示したシナリオは,アメリカ数学会学会誌が 7 ページに渡る解説を掲載するなど，非線形解析学の進展に大きく貢献した．ここで展開された一連の革新的な解析方法は，後に弱スケール極限の方法と呼ばれるようになる．このシナリオは本課題によって整備され，現在では次の形では要約されている．a）熱力学の第 1，第 2 法則に対応する（質量）保存則とリヤプノフ関数（自由エネルギー）の存在により，定常問題が非局所項を持つ非線形固有値問題として定式化される b）非定常問題のスケール不変性から定常問題も同様の性質をもち，爆発解析によってその解の臨界状態とそこに至る遷移過程を解明することができる c）その結果定常状態全体の描像と非定常問題における爆発機構の量子化が暗示される（非線形スペクトル力学） d）弱形式から導出される単調性公式によって，非定常有限時間爆発解においてコラプス（デルタ関数）が出現することが証明できる e）方程式のスケール不変性から自然に導出される後方自己相似変換に対して階層的な議論をすることにより，スケール極限としての弱解が生成される f）このとき爆発包の議論によって，コラプス質量が保存されスケールされた 2 次モーメントが一様有界となる．すなわちスケール極限をとっても爆発機構の本質は損なわれない g)スケール極限は極限方程式の弱解である.弱解の一意性は得られないが，その指標である 2 次モーメントの有界性から，決定論的な命題であるコラプス質量の下からの評価が得られる h）上からの評価をするためにはスケールバックして元の方程式の全空間の半軌道に移行し，更に平行移動して 2 番目の弱極限を作る．この操作により，全空間で元の爆発機構を保全した弱解の全軌道が得られる i）この軌道に対して，さらに局所 2 次モーメントとスケール不変性を用いた 2 段階の議論（黒木場・小川の方法）を適用するとコラプス質量の上からの評価が導出される j）これらの性質，すなわちコラプスの量子化をスケール極限の放物型包に反映させると，サブコラプスの生成・タイプ II の爆発レート・自由エネルギーがハイパーパラボラに取り込まれること（創発性）が証明できる．本課題では他の非定常問題において爆発機構量子化の解明するために，まずこの処方箋が有効であるかどうかを検討した

(2)点渦系における非線形現象の基本要因である自己組織化は,平均場近似において Boltzmann-Poisson 方程式が記述し,その解の臨界状態のプロフィールは元のハミルトニアンが忠実に表現する．従って Boltzmann-Poisson 方程式を知ることは領域形状との関係でハミルトニアンを知ることである．一方，Boltzmann – Poisson 方程式の近傍にはハミルトニアンが解の族の臨界状態（特異極限）を規定するようなモデルが多数存在する．点渦系ハミルトニアンの解明はこれらのモデルの統一的理解をもたらすもので,非線形スペクトル力学を介して関連する近平衡動態も明らかにする．そこで

Liouville 方程式の線形化固有関数を分析し,その漸近評価によって各種汎関数の挙動を確認することを試みた.

(3)双対変分構造は流体や材料科学のモデルの多くで観察され,定常解の安定性を解明するうえで基本的な役割を果たす.非線形性が特に高い熱弾性モデル研究を中心的な課題として取り上げ,定常状態とその安定性を解明した.同時に解析的な非線形性の下でのオメガ極限集合の単独性，ヘテロクリニック軌道の存在について試行的に考察した. また組織・細胞レベルで化学反応を取り込んだものや多種生態系など，生物モデルにおける熱力学法則の確立とその数学解析への応用も試みた.

(4)今日の非線形偏微分方程式論では，すでに確立された基礎方程式を用い，場合によっては摂動を加えて解の存在や一意性を論ずるという純粋数学的な議論がある一方,現象を象徴的に再現するような数理モデルを構築しシミュレーションを実行して何らかの解釈をするといった研究も行われている.

本課題では一見対極にある2つのアプローチを相補的な関係においた. すなわち数理構造を明確にすることで数理モデリング（入口）と数学解析（出口）を融合すること，またその融合研究によってモデルの背景にある数学原理を確立することを目指した.とりわけ天体物理学と細胞生物学との共同研究を実施すると同時に純解析的な研究を実施して非線形数学の技術革新を促進した.

４．研究成果

(1)スケーリングによって指数型非線形性が,質量保存則の下で空間2次元において臨界的な非線形性となることは知られていたが,この場合の変分汎関数をToland双対によって場と粒子に振り分け，その上で両者をLagrange関数で統合し,さらにLagrange関数を用いてモデルB-モデルAで連立したものがSmoluchowski-Poisson方程式であることを突き止めた.この分析によってSmoluchowski-Poisson方程式が質量保存の下での臨界的な非線形性を持つことが明らかになり,課題研究で提示したシナリオの正しさが実証された.さらにこのシナリオを，Smoluchowski-Poisson方程式だけでなく，関連するそれ以外のモデルを適用して技術的な改善や議論の整理を進めた.測度論を用いたデリケートな議論が細部まで厳密に確立し，汎用性のある新しい解析方法である弱スケール極限の方法が確立し国際的な注目と議論を巻き起こすとともに,それ以後に爆発的に展開される応用研究の先駆となった.

(2)空間2次元の臨界非線形性の下での爆発機構量子化の解明も，自己相互作用粒子平均場モデル研究を大きく進展させた.特に空間3次元以上で自己重力流体方程式やエントロピー最大原理から導出される退化放物型方程式の場合に爆発解析を展開し,タイプIIの爆発点の有限性を証明した. このモデルでは単調性公式が成り立たず，2次元とは全く異なる状況であったが，2次モーメントと自由エネルギーとの新しい関係・スケーリング・Smoluchowski-Poisson方程式に対する無限時間爆発の解明で開発した局所ノルムの放物型正則性を用いて，上記の著しい結果を得た. また臨界Sobolev指数の非線形性の下での半線形放物型方程式における爆発機構の量子化を，エネルギーレベルで捕捉し，高次元の熱方程式の優解が有界領域の内部に特異集合を閉じ込めている時，その2次元低い測度の時間積分が常に領域の体積の半分で上から評価されることも示した.結果の意外性は偏微分方程式研究の国際的な共同体に衝撃を与えた.

(3)2次元のLiouville方程式について,これ

までは解の特異極限の爆発点の位置とハミルトニアンの臨界点が一致することが知られていただけであったが，この対応がさらに両者の線形化非退化性にまで及ぶことを示した．非退化性は変数係数の場合にも確認され,モース指数の計算まで進んでいる．これらの研究によって,プラズマ問題など他のモデルにおいて展開されてきた領域の形状とハミルトニアンに関する分析が，個別の定理に留まるのではなく,一気に多数のモデル群の解析と結びつく状況（楕円型一元化理論）に近づいた.

(4)熱力学を基盤とする材料科学の様々なモデルにおいて半双対変分構造が成立していることを明らかにした．そのシナリオは次の通りである．a）これらのモデルは表象的に場と粒子とを表す2つの変数の相互作用を記述するものと見なすことができる b)そこでは熱力学の第1法則と第2法則が成立している.c）定常問題では粒子が自明であり，この未定定数は質量保存則で規定される d)そのとき定常問題は場の方程式に縮約され，縮約された場の方程式は変分構造をもつ e)このときの場の汎関数は，非定常状態の第2法則を表す Lagrangian において，粒子を自明な状態に設定した半定常状態との間に「semi-unfolding-minimality」という関係（半双対変分構造）f）半双対変分構造から無限小安定な定常状態が力学安定であることが導出される.そこで,相転移・相分離に関するPenrose-Fife方程式，Fix-Caginalp方程式,記憶形状効果を持つ熱弾性モデルについて，それぞれの保存則を組み込んだ定常問題を定式化してその構造を分析し，安定性理論によって大域的力学系，とりわけヘテロクリニック軌道の存在を予言した.解析的な非線形性の下で，場の汎関数の極小から無限小安定が導出されることを明らかにしたことは大きな成果で,熱力学モデルにおけるLojasewicz-Simon不等式との関わりという新しい研究テーマが浮上してきた.

(5)自己重力流体では，Lions-Feireislの方法で弱解を構成した上で，場の汎関数の意味で無限小安定な定常解の力学安定性を確定した.Maxwell方程式では特定の成分に界面の消滅が引き起こされることを発見していたが,この現象をLagrange座標との関連で記述するアイデアを得た.渦なしの圧縮性流体方程式がハミルトン系で記述されることを見出し，有限時間での解の爆発を証明した.ハミルトン構造という新しい視点を導入し，Lotka-Volterra，Gierer-Meinhardtの2つのモデルを扱った.ともに常微分方程式部分をハミルトン系で記述することに成功した.さらに反応拡散系におけるリヤプノフ関数（自由エネルギー）により，力学系の理論によってオメガ極限集合が空間均一になること,より詳しくは空間的には平均化され，時間的には周期的な状態に移行することを示した.

(6)数理物理学とリンクしたモデル解析では,上述の動的平均場理論の他,点渦乱流系の多強度モデルを構築し，渦糸系平均場方程式との整合性を検証した．同時に,強度が連続的に分布する場合のTrudinger-Moser不等式の最良形を確定するとともに，臨界定数において最小値が達成される場合があることを予測した.実験やシミュレーションも込めた細胞生物学研究と連携して新しく使われた数理モデルの解析を実施した.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 117 件）

1.E.E. Espejo, A. Stevens, and T. Suzuki, Simultaneous blowup and mass separation during collapse in an interacting system

of chemotactic species, Differential and Integral Equations 25 (2012) 251-288 査読有
2.M. Grossi, H. Ohtsuka, and T. Suzuki, Asymptotic non-degeneracy of the multiple blow-up solutions to the Gel'fand problem in two space dimensions, Adv. Differential Equations 16 (2011) 145-164 査読有
3. R. Ikehata, M. Ishiwata, and T. Suzuki, Semilinear parabolic equation in ${¥bf R}^N$ associated with critical Sobolev exponent, Ann. Inst. H. Poincar¥'e, Analyse nonlin¥'eaire 27 (2010) 877-900 査読有
4. T. Suzuki and S. Tasaki, Stationary Fix-Caginalp equation with non-local term, Nonlinear Analysis 71 (2009) 1329-1349
5. T. Kobayashi and T. Suzuki, Weak solutions to the Navier-Stokes-Poisson equation, Adv. Math. Sci. Appl. 18 (2008) 141-168 査読有

〔学会発表〕(計 166 件)
1. T. Suzuki, Smoluchowski-Poisson equation in statistical physics and cell biology - mathematics for blowup with quantization, 5th Polish-Japanese Days on Nonlinear Analysis in Interdisciplinary Sciences, Modelling, Theory and Simulations, Kansai Seminar House, Kyoto, Japan, 2012. 11. 6.
2. T. Suzuki, From static to kinetic mean field theories - hierarchy and duality, RIMS Camp-style Seminar, Modern approach and developments of Onsager's theory on statistical vortices, Apical in Kyoto, 2011. 8. 31.
3. 鈴木貴, 循環するハミルトニアン-相互作用の階層, 愛媛大学数学教室談話会, 解析セミナー, 2010. 7. 28.
4. T. Suzuki, Point vortex turbulence-a recursive hierarchy, The Second Chile-Japan Workshop on Nonlinear Elliptic and Parabolic PDEs, 明治大学, 2009. 12. 3.
5. T. Suzuki Dimension control of the blowup set for parabolic and elliptic problems, Third Euro-Japanese Workshop on Blowup, 東北大学, 2008. 9. 11.

〔図書〕(計 4 件)
1. T. Suzuki and T. Senba, Applied Analysis: Mathematical Methods in Natural Science, second edition, Imperial College Press, London, 2011. 515pp
2. T. Suzuki, Mean Field Theories and Dual Variation - A Mathematical Profile Emerged in the Nonlinear Hierarchy, Atlantis Press, Amsterdam, 2008. 288pp

〔産業財産権〕
○出願状況 (計 3 件)
名称：磁場源推定装置
発明者：鈴木貴他
権利者：大阪大学
種類：特願
番号：2009-283426
出願年月日：平成 21 年 12 月 14 日
国内外の別：国内

〔その他〕
ホームページ等
http://www.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/suzuki/title.html

6．研究組織
(1)研究代表者
鈴木　貴 (SUZUKI TAKASHI)
大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授
研究者番号：40114516
(2)研究分担者
三沢　正史 (MISAWA MASASHI)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：40242672
(H20:分担者　H21-H24:連携研究者)
高橋　太 (TAKAHASHI FUTOSHI)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：10374901
(H20-H21:分担者　H22-H24:連携研究者)
内藤　雄基 (NAITO YUKI)
愛媛大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：10231458
(H20-H21:分担者　H22-H24:連携研究者)
大塚　浩史 (OHTSUKA HIROSHI)
宮崎大学・工学部・准教授
研究者番号：20342470
(H20-H21:分担者　H22-H24:連携研究者)
杉山　由恵 (SUGIYAMA YOSHIE)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：60308210
(H20-H21:分担者　H22-H24:連携研究者)
石渡　通徳 (ISHIWATA MICHINORI)
福島大学・共生システム理工学類・准教授
研究者番号：30350458
小林　孝行 (KOBAYASHI TAKAYUKI)
佐賀大学・大学院工学系研究科・教授
研究者番号：50272133
(H20-H21:分担者　H22-H24:連携研究者)

名和　範人 (NAWA HAYATO)
大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授
研究者番号：90218066
(H20,H22,H23:分担 H21,H24:連携研究者)
渡邊　一雄 (WATANABE KAZUO)
学習院大学・理学部・助教
研究者番号：90260851
（H23:分担者 H24:連携研究者)
佐藤　友彦 (SATO TOMOHIKO)
日本大学・生産工学部・助教
研究者番号：50397676
（H21,H24:分担者　H22,H23:連携研究者)
松村　昭孝 (MATSUMURA AKITAKA)
大阪大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号：60115938
（H20:分担者 H21-H24:連携研究者)
八木　厚志 (YAGI ATSUSHI)
大阪大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号：70116119
（H20:分担者　H21-H24:連携研究者)
(3)連携研究者 (研究者番号)
吉川　周二 (YOSHIKAWA SHUJI)
愛媛大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：80435461
黒木場　正城 (KUROKIBA MASAKI)
室蘭工業大学・工学系研究科・准教授
研究者番号：60291837
降旗　大介 (FURIHATA DAISUKE)
大阪大学・ｻｲﾊﾞｰﾒﾃﾞｨｱｾﾝﾀｰ・准教授
研究者番号：80242014
倉田　和浩 (KUWATA KAZUHIRO)
首都大学東京・理工学研究科・教授
研究者番号：10186489
田中　視英子 (TANAKA MIEKO)
東京理科大学・理学部・助教
研究者番号：00459728
山田　義雄 (YAMADA YOSHIO)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：20111825
齊藤　宣一 (SAITO NORIKAZU)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：00334706
高橋　亮 (TAKAHASHI RYO)
大阪大学・大学院基礎工学研究科・助教
田崎　創平 (TASAKI SOHEI)
東北大学・大学院理学研究科・特別研究員
Tonia Ricciardi
ナポリ大学
Georgia Karali
クレタ大学
Angela Stevens
ミュンヘン大学
Nikos Kavallaris
エーゲ大学
Irena Pawlow
ワルシャワ大学
Mark Chaplain
ダンディー大学
Vito Quaranta
バンダービルト大学
Pierre-Henri Chavanis
トゥールーズ大学