

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 6月 7日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2008～2012

課題番号：20340035

研究課題名（和文）

散逸系における指数アトラクタの構造解析とその応用

研究課題名（英文）

Structural Analysis on Exponential Attractors for Dissipative Systems

研究代表者

八木 厚志 (YAGI ATSUSHI)

大阪大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：70116119

研究成果の概要（和文）：理論的研究では、有限・無限次元力学系に対して指数アトラクタを構成する方法するための新しい結果を示した。さらに、移流・反応・拡散方程式を数値計算するための新しい効率的スキームの開発を行った。応用的研究では、シロアリの塚構築モデルについて指数アトラクタの構成と次元の評価、血管新生モデルについてパターンとその波面動態のシミュレーション、森林生態モデルについて森林境界の存在証明とそのパラメータ依存性の調査をそれぞれ行った。

研究成果の概要（英文）：Theoretically we have contributed to devising new methods for construction of exponential attractors for finite and infinite dimensional dynamical systems and new schemes for discretization of advection-reaction-diffusion equations. We have then applied these results to various mathematical models in the real world, that is, construction of exponential attractors for the termite mound building, numerical computation for the tumor induced angiogenesis to investigate behavior of the endothelial cell front, proof of existence of forest natural boundaries for the forest ecosystem together with their dependence on the forest parameters.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	3,000,000	900,000	3,900,000
2011年度	1,900,000	570,000	2,470,000
2012年度	1,900,000	570,000	2,470,000
総計	9,400,000	2,820,000	12,220,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：散逸系、力学系、アトラクタ、確率微分方程式、拡散方程式、自己組織化

## 1. 研究開始当初の背景

指数アトラクタの概念は、1994年 Eden-Foias-Nicolaenko-Temam により主に流体の力学系研究の過程で提出された。その後、2000年 Effendiev-Miranville-Zelik は非線形拡散方程式系から定まる広範な力学系に対して指数アトラクタを構成するための方法を提

案した。本研究の代表者並びに連携研究者は、これらの方法をより使い易く抽象方程式版に整理するとともにそれを走化性モデルなど流体以外のモデルに対して応用した。このような背景の下、本研究では確率モデルから定まる力学系の指数アトラクタの構成、指数アトラクタの効率的な数値計算方法の開発、

それらの成果を踏まえた生物学モデルの応用的研究を目指した。

## 2. 研究の目的

散逸系から定まる力学系についてその指数アトラクタの構造を調べることが目的でその詳細は以下の5つに分けられる。

(1) 一般に散逸系には制御パラメータが見出され、その変動により創発するパターンや構造も変化する。そこでモデル方程式の制御パラメータにノイズ効果を入れた確率微分方程式モデルを建てそれに対して指数アトラクタを構成することにより解の漸近挙動を調べる。

(2) 散逸系の科学によれば、一方で散逸効果により状態変数の自由度の絞り込みが起ると同時に、制御パラメータが変動すると同様で平衡な状態はやがて安定性を失い非平衡な状態が出現すると考えられている。その場合、平衡状態からのゆらぎが成長し新しい状態が決定されると考えられる。そこでゆらぎの成長を詳細に調べるための方法の一つとして効率的な数値計算法の開発を行う。

(3) 応用研究の第1として、走化性モデルを扱う。1990年 Budrene-Bergにより大腸菌の顕著な集合体パターンが発見された。誘引物質の産出と走化性により高度な幾何学パターンが自律的に築かれ、その出現パターンは走化性の強度の変化につれて共に変化する。本研究では、大腸菌モデルについて、また1977年 Deneubourgにより提案されたシロアリによる塚構築モデルについて調べる。

(4) 応用研究の第2として、血管新生モデルを扱う。1998年 Anderson-Chaplainは腫瘍型血管新生の過程を血管内皮細胞の走触性と血管新生促進物質に対する走化性によりモデル化を行った。本モデルは2つの非線形移流項を含んでおり、2つの制御パラメータを有する所謂ハイブリッド型モデルである。走触性の強度および走化性の強度のバランスによりどのようなパターンが出現するかを調べる。

(5) 最後は、森林生態系モデル、マングローブ林の動態モデルを扱う。1994年 Kuznetsov-Antonovsky-Biktashev-Aponinaは森林の生態を若年層木の密度、壮年層木の密度、空中の種子密度を状態変数とする拡散モデルを提案した。本研究では特にモデル方程式から数学的に導出される森林境界に着目してその境界が森林パラメータからいかに決定されるかを調べる。また、本モデルに堆積土壌

と森林との相互作用を組み入れた土壌・森林モデルを導入しそれを解析する。土壌・森林モデルはマングローブ林の動態を記述する数学モデルと考えられる。

## 3. 研究の方法

上記のそれぞれの研究目的について以下のような方法で取組む計画を立てた。

(1) ①有限次元確率力学系については、Rudnickiの理論を整理し確率微分方程式版を作る。これよりsweepingが起きる場合と時間無限大における極限状態に対応する確率密度関数が存在する場合との背反条件を導くための方法を示す。

②無限次元力学系については、抽象放物型発展方程式の理論を基に確率発展方程式の大域的な強い解の存在定理を示す。次いで既存の指数アトラクタ概念を自然に拡張し確率力学系における指数アトラクタ概念の導入を行う。本課題の遂行に当たっては、研究分担者の長井英生教授、海外連携研究者のMessoud Efendiev教授（ミュンヘンHelmholtz研究所）、Nguyen Huu Du教授（ハノイ大学）と研究協力を行う。

(2) 非線形拡散方程式の数値計算のための基本スキームは、差分法・有限要素法などである。しかし、それらをそのまま単独で使う方法は計算効率の面からコスト高となり適切でない。ADI法のような実用的な工夫が必要となる。本研究でもそれらに立脚しつつ移流、反応、拡散の各効果の特性を生かした新しいスキームの開発を行う。本課題では、研究分担者の笠井秀明教授（阪大）、大学院学生Doan Duy Haiとの協力の下に研究を推進する。

(3) ①走化性モデルの研究では、大腸菌の集合体パターンを記述する方程式について走化性の強度を大きくした場合の数値計算を行いどのようなパターン解が出現するかを調べる。本課題では、大腸菌モデルの提案者である連携研究者辻川亨教授（宮崎大工）と協同して研究を進める。

②シロアリの塚構築モデルにおいては、解析的な研究から着手することにして先ず時間大域解を構成する、次いでグローバル・アトラクタ、指数アトラクタを構成する。さらに数値計算によりパターン解を求める。特に走化性のパラメータの変動と出現するパターンとの関係性を調べる。

(4) 血管新生モデルでは、解析的な結果が得られていないことから先ず時間大域解の構成を行う、次いでグローバル・アトラクタおよび指数アトラクタの構成を行う。併せて、

指数アトラクタの次元評価を行う。数値計算としては、血管内皮細胞の走触性と腫瘍より産出される新生促進物質に対する走化性とのバランスが変動により出現パターンがどのように変化するかを調べる。特に新生された血管がつくる腫瘍への進行波面の挙動、形状、進行速度等について調べる。

(5) ①森林動態モデルでは、数値計算により見出された森林境界についてそれを解析面から考察しどのようなメカニズムによりそれらが出現するかをモデル方程式から直接説明できるようにする。次いで、森林境界が方程式に含まれる様々なパラメータに依存してどのように決定されるかを明らかにする。特に、数値シミュレーションを実施して壮年木の枯死率が增大するとき森林境界がどのように後退するかを詳細に調べる。

②マングローブモデルでは、森林動態モデルを元にそれに堆積土壌の密度を新たな状態変数として加え森林生態系と土壌物理との相互作用を数式化して新たなモデル方程式を建てる。そのモデルに対して先ず解析的研究として時間大域解を構成しグローバル・アトラクタ、指数アトラクタを構成する。数値計算により解の挙動を調べ土壌の堆積・浸食と樹木の動態との関係性を明らかにする。

#### 4. 研究成果

上記の各研究目的、方法について本研究で得られた成果は以下の通りである。

(1) ①有限次元確率力学系の研究では、Rudnicki の理論を確率微分方程式版に整理し論文[1, 5]では動物の群形成モデルに論文[9]では生態学の捕食者・被食者モデルに論文[11]では相転移モデルに発表[1]では森林生態系モデルにそれぞれ適用した。それぞれにおいて sweeping が起こる条件と時間無限大において収束する確率密度関数が存在するための条件を与えることができた。

②無限次元力学系の研究では、論文[12]で時間非斉次確定的 (deterministic) 力学系に対して指数アトラクタの概念を新たに導入しそれらを構成するために発展作用素について検証すべき簡便な条件を見出した。同じく、論文[10]では力学系の各軌道が極限を持つための条件について考察した。これらは、確率力学系の研究に直接繋がる重要な結果ではあるが残念ながら本研究ではそれらを確率力学系にまで拡張するには至らなかった。抽象放物型発展方程式の最近の進展 (図書[2, 4]) を踏まえ今後の課題としたい。

(2) 移流・反応・拡散方程式についての一般的な離散スキームの開発では、発表[4]、論

文[3]において移流項には陽的スキームを反応・拡散項には陰的スキームをそれぞれ適用しそれらを適切に組み合わせることにより構成した新しいスキームを考案した。連続ではあるがスティッフな項は陰的スキームで、不連続な項は陽的なスキームで扱うという差別化を導入する所が新しいアイデアである。幾つかの例でその優越性を確かめているが本格的な応用はこれからである。また、本成果を纏めた論文は現在投稿中である。

(3) ①走化性の腸菌モデルでは、数値計算のスキームを改良することにより、従来スキームでは計算不可能であった走化性パラメータの領域まで解のプロファイルを見られるようになった。論文[17]、図書[3, 13 章]、[4, Chap. 12]で示したように、カオス状パターンの後に斑点状の安定なパターンが再び出現することを新たに見出した。

②シロアリの塚構築モデルでは、発表[10]、図書[3, 14 章]、[4, Chap. 13]で示したようにモデル方程式について指数アトラクタが構成できることを示しその次元の評価を行った。従来知られていた方法では、解の強い散逸性を必要とし本モデルには適用できなかったが、それをさらに発展させ本モデルにも適用できるようにした。数値計算についても試みたが纏まった成果が得られるところまでは至らなかった。

(4) 血管新生モデルについては、発表[2, 5]、論文[3]で示したように指数アトラクタの構成を行った後、数値計算により解の時間大域的な挙動を調べて、血管内皮細胞の走触性の強度が強いと例え腫瘍が発する新生促進因子により誘引されても内皮細胞の波面は腫瘍にまで到達しないこと、一方弱いと直ちに腫瘍まで到達することを見出した。この事実の病理学的な意義について今後検討を深めていく予定である。

(5) ①森林動態モデルでは、論文[18, 19, 24]により解の時間大域的な挙動ならびに森林境界の存在性を解析的に証明し数値計算によりそれがパラメータに敏感に依存することを見出した。さらに、論文[21]では、モデル方程式を使ってどのようなメカニズムによって森林境界が出現するののかの原因を明らかにした。また最近の発表[1]では、確率微分方程式モデルを使って壮年木の枯死率にノイズを入れた場合に解の漸近挙動について調べた。一方で、発表[6]、論文[15]では、森林境界が森林パラメータからどのような表式により記述されるのか、パラメータの変動に対してどの程度安定か不安定かといった問題についてより詳細な知見を得ることの重要性と解決への見通しについて議論をし

た。

②マングローブモデルでは、論文[14, 20]、発表[11]で新しい数理モデルの可能性とそれらモデルの散逸性について考察した。森林の生態系と土壌物理との相互作用の記述については幾つかの可能性がありそのうちどれを採用するかはフィールド・ワーカーとのさらなる議論が必要であるように思われる。

本研究課題に関係する成果については、解説論文[14, 20]、学会での企画特別講演による発表[9]、研究者向け図書[2, 3, 4]を通して公表した。また、平成 24 年 8 月には国際的な研究集会を開催するとともにその報告集[1]を出版した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 2 件)

- [1] T. V. Ton, N. T. H. Linh and A. Yagi, Flocking and non-flocking behavior in a stochastic Cucker-Smale system, Anal. Appli., to appear. 査読有
- [2] T. Uchitane and A. Yagi, Optimization scheme based on differential equation model for animal swarming, Open Journal Optimization, to appear. 査読有
- [3] D. D. Hai and A. Yagi, Behavior of solutions to some mathematical model for angiogenesis, Proc. Seminar on Partial Differential Equations in Osaka 2012, Osaka University (2013), 131-140. <http://hdl.handle.net/11094/24563> 査読無
- [4] A. Yagi, Refined properties of evolution operator under Kato-Tanabe conditions, Proc. Seminar on Partial Differential Equations in Osaka 2012, Osaka University (2013), 131-140. <http://hdl.handle.net/11094/24563> 査読無
- [5] T. Uchitane, T. V. Ton and A. Yagi, An ordinary differential equation model for fish schooling, Sci. Math. Jpn. 75(3) (2012), 339-350. 査読有
- [6] A. Yagi, Functional calculus of linear operators, Proc. Interactions between Real and Complex Analysis, Science and Techniques Publishing House, Ha Noi, 2012, 171-184. 査読有
- [7] A. Yagi, Maximal regularity of Hölder type for abstract parabolic evolution equations, Funkcial. Ekvac. 55(3) (2012), 405-428. 査読有

- [8] D. D. Hai and A. Yagi, Longtime behavior of solutions to chemotaxis-proliferation model with three variables, Discrete Contin. Dynam. Systems 32 (11) (2012), 3957-3974. 査読有
- [9] A. Yagi and T. V. Ton, Dynamic of a stochastic predator-prey population, Applied Math. Comm. 218(2011), 3100-3109. 査読有
- [10] M. Graselli, G. Mola and A. Yagi, On the longtime behavior of solutions to a model for epitaxial growth, Osaka J. Math. 48(4) (2011), 987-1004. 査読有
- [11] T. V. Ton, Y. Yamamoto, N. H. Du and A. Yagi, Asymptotic behavior of solutions to stochastic phase transition model, Sci. Math. Jpn. 73(2&3) (2011), 143-156. 査読有
- [12] M. Efendiev, Y. Yamamoto and A. Yagi, Exponential attractors for non-autonomous dissipative system, J. Math. Soc. Japan 63(2) (2011), 647-673. 査読有
- [13] T. V. Ton and A. Yagi, Dynamics of stochastic predator-prey model with the Beddington-Deangelis functional response, Comm. Stochastic Anal. 5(2) (2011), 371-386. 査読有
- [14] A. Yagi, Exponential Attractors, AMS Sugaku Exposition 24(2) (2011), 183-204. 査読有
- [15] A. Yagi, Open problems in forest model, Proc. Workshop on Methods of Modern Mathematical Analysis and Applications, Hanoi 2010, 1-9. 査読無
- [16] A. Yagi, K. Osaki and T. Sakurai, Exponential attractors for Belousov-Zhabotinskii reaction model, Discrete Contin. Dynam. Systems Supplement 2009(2009), 846-856. 査読有
- [17] D. D. Hai and A. Yagi, Numerical computations and pattern formation for chemotaxis-growth model, Sci. Math. Jpn. 70(2) (2009), 205-211. 査読有
- [18] G. Mola and A. Yagi, A forest model with memory, Funkcial. Ekvac. 52(1) (2009), 19-40. 査読有
- [19] L. H. Chuan, T. Tsujikawa and A. Yagi, Stationary solutions to forest kinematic model, Glasgow Math. J. 51(2009), 1-17. 査読有
- [20] 八木厚志, 指数アトラクタ, 数学 61(2), 岩波書店, 2009, 187-208. 査読有
- [21] A. Yagi, Free boundary problem in forest model, Proc. Nonlinear Phenomena with Energy Dissipation, Gakkotosho (2008), 425-440. 査読有
- [22] A. Yagi,  $H_\infty$  functional calculus and

characterization of domains of fractional powers, “Operator Theory: Advances and Applications” Birkhäuser, 2008, 217– 235. 査読有

[23] A. Yagi, Exponential attractors for competing species model with cross-diffusions, *Discrete Contin. Dynam. Systems* **22**(4) (2008), 1091–1120. 査読有

[24] T. Shirai, L. H. Chuan and A. Yagi, Stationary solutions for forest kinematic model under Dirichlet conditions, *Sci. Math. Jpn.* **67**(3) (2008), 319–328. 査読有

[学会発表] (計 14 件)

[1] A. Yagi, Stochastic forest model, Conference on “Functional Analysis and Applications — Evolution Equations and Control Theory —”, 2013. 2. 12, Kobe University.

[2] A. Yagi, Longtime behavior of solutions to some mathematical model for angiogenesis, 5<sup>th</sup> Polish–Japanese Days on “Nonlinear Analysis in Interdisciplinary Sciences — Modeling, Theory and Simulations —”, 2012. 11. 7, Kansai Seminar House, Kyoto.

[3] A. Yagi, Functional calculus of linear operators, 20<sup>th</sup> International Conference on “Finite and Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications”, 2012. 8. 1, Hanoi University of Science and Technology.

[4] A. Yagi and D. D. Hai, A Numerical method for chemotaxis model, Conference on “Evolution Equations, Related Topics and Applications”, 2012. 3. 20, Waseda University.

[5] 八木厚志, Mathematical Model for Angiogenesis, 研究集会「放物型発展方程式とその応用」, 2011. 9. 22, 大阪大学.

[6] A. Yagi, Open problems in forest model, Workshop “Methods of Modern Mathematical Analysis and Applications”, 2010. 8. 31, Hanoi University of Science.

[7] A. Yagi, Exponential attractors for non-autonomous chemotaxis systems, 8<sup>th</sup> AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2010. 5. 25, Dresden University.

[8] A. Yagi, Dynamical system for activator–inhibitor model, Conference on “Evolution Equations, Related Topics and Applications” supported by JSPS and DFG, 2009. 9. 8, Helmholtz Zentrum München.

[9] 八木厚志, 散逸系の数学的構造～その解

明に向けて～、日本数学会 2009 年度年会企画特別講演、2009. 3. 26、東京大学.

[10] A. Yagi, Finite-dimensional attractors for termite mound building model due to Brussels school, Tutorial Workshop on “Analytic Semigroups and Related Topics”, 2009. 1. 15, Tokyo University.

[11] A. Yagi, Mathematical approach to mangrove geo-ecosystem, 11<sup>th</sup> De La Salle University–Osaka University Academic Research Workshop & Symposium, 2008. 9. 1, De La Salle University.

[図書] (計 4 件)

[1] A. Yagi and Y. Yamamoto (eds), Proceedings of Seminar on Partial Differential Equations in Osaka 2012, Osaka University, 2013, pp. 215.

<http://hdl.handle.net/11094/24563>

[2] 八木厚志, 放物型発展方程式とその応用 (上) — 可解性の理論 —, 岩波書店, 2011, 387 頁.

[3] 八木厚志, 放物型発展方程式とその応用 (下) — 解の挙動と自己組織化 —, 岩波書店, 2011, 369 頁.

[4] A. Yagi, Abstract Parabolic Evolution Equations and their Applications, Springer, Berlin, 2010, pp. 599.

[その他]

ホームページ等

<http://www-nomo.ist.osaka-u.ac.jp/atsushi-yagi/index.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

八木 厚志 (YAGI ATSUSHI)  
大阪大学・情報科学研究科・教授  
研究者番号：70116119

### (2) 研究分担者

笠井 秀明 (KASAI HIDEAKI)  
大阪大学・大学院工学研究科・教授  
研究者番号：00177354  
長井 英生 (NAGAI HIDEO)  
大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授  
研究者番号：70110848  
(2011 年まで分担者として参画)

### (3) 連携研究者

辻川 亨 (TSUJIKAWA TORU)  
宮崎大学・工学部・教授

研究者番号：10258288

大崎 浩一 (OSAKI KOUICHI)

関西学院大学・理工学部・教授

研究者番号：40353320