

機関番号：62603

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20500264

研究課題名（和文） MCMC法によるポロノイ空間分割配置データの  
統計解析法の開発研究課題名（英文） Development of the methods of statistical analysis  
for spatial data of Voronoi tessellation through MCMC method

研究代表者

種村 正美 (TANEMURA MASAHARU)

統計数理研究所・名誉教授

研究者番号：80000214

研究成果の概要（和文）：自然界に見られる多角形分割のデータが山積しているが、それらの統計解析を行うための手法が未開発である。われわれはこの状況を打開するため、MCMC法を多用した統計的方法を開発した。われわれが用いた統計モデルは広範囲の多角形分割パターンを再現できることが判明し、モデルに含まれるパラメータの推定も行うことができるようになった。

研究成果の概要（英文）：It is known that there are many polygonal tessellation data in the field of natural sciences. But most of such data remained untouched from the point of statistical analysis. In order to break this situation, we have developed a statistical procedures using MCMC method in depth. As a result of our research, it is revealed that various types of polygonal tessellation pattern are reproducible in our statistical model and that statistical estimation of model parameters is able to execute.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	2,300,000	690,000	2,990,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：空間統計

科研費の分科・細目：情報学・統計科学

キーワード：ポロノイ多角形、空間統計学、相互作用ポテンシャル、Gibbs分布、疑似尤度、MCMC法、モデル化

## 1. 研究開始当初の背景

(1) これまで研究代表者らは空間に散布された多数の点による配置を統計解析する手段としてMCMC法を多用した尤度法の開発を手がけてきた。われわれの研究は現在、総計科学分野でMCMC法が注目されていることの先駆けとなっている。

(2) 一方で、研究代表者らは動物のなわばりによる空間分割パターンや生物組織の細胞分割パターンなど、有限な領域のセル分割

による空間配置の統計モデル構成を長年手がけてきている。これらの研究では、われわれはなわばりや細胞による空間分割がポロノイ多角形を用いてモデル化できる点に着目してきた。また、2次元・3次元のポロノイ・セル空間分割の計算プログラムを開発して、国内外の研究者に無償で提供してきた。

(3) 以上の学術的背景から、われわれは空間点配置に対して行ってきた統計的手法を空間分割の問題に拡張・発展させることの必

要性を痛感していたし、研究代表者がその研究を行える状況にあると考えていた。

## 2. 研究の目的

(1) 自然界では金属に現れる多結晶粒界、森林における樹冠による空間分割、動物のなわばりによる生息地の分割パターン、生物組織に見られる細胞パターンなど種々の多角形分割データが得られる。そこで、これらのデータに対する統計モデルを構築し、統計解析手法を開発することが重要である。

(2) 「研究開始当初の背景」に述べた事情を元にして、MCMC法による計算機シミュレーションとボロノイ・セル空間分割の計算プログラムを併用して「研究の方法」に示すアイデアを実行することで統計解析手法を開発し、有効性を提示することが目的である。

## 3. 研究の方法

(1) まず与えられた多角形分割データがある点配置から構成されるボロノイ多角形と見なせると仮定する。実際、任意の多角形分割データから、それが近似的にボロノイ多角形分割となる点配置を求める方法が存在する。

(2)  $N$  個の多角形に対して求められた  $N$  個の点の位置座標を  $X_N$  とし、領域  $A$  を各点を中心とするボロノイ多角形で分割する。そして、そのボロノイ分割パターンはボロノイ・セルの全辺長、各面積、各辺長で表された3つの項からなるポテンシャル・エネルギーの下で平衡にあると仮定する。エネルギーの3項の係数をそれぞれ  $a, b, c$  とするとき、それらの値が分割パターンの特徴を反映するはずである。ある相互作用ポテンシャルの下で平衡にある配置は Gibbs 分布に従うことが知られている。

(3) あるポテンシャル・エネルギーの下での Gibbs 分布に従う配置を実現する計算機シミュレーションの方法として最適なのが MCMC 法 (マルコフ連鎖モンテカルロ法) である。MCMC 法を用いて、種々のパラメータ ( $a, b, c$ ) の値の組み合わせに対して、それぞれの平衡配置を計算する。

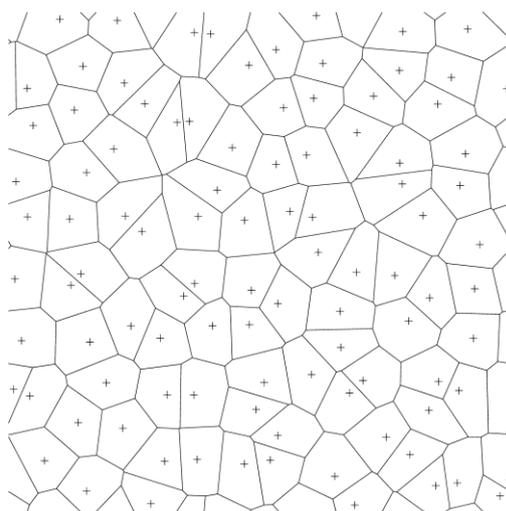
(4) シミュレーションから得られたボロノイ分割パターンとパラメータとの対応関係を調べ、ランダム型、集中型、規則型のパターンに対するパラメータ値を求める。

(5) シミュレーション・データが与えられたとき、それに対応する相互作用ポテンシャルのパラメータ値を統計的に推定する方法を開発して、シミュレーション・データに対して検証するとともに実データへの適用を行う。

## 4. 研究成果

(1) 上記の相互作用ポテンシャルによっ

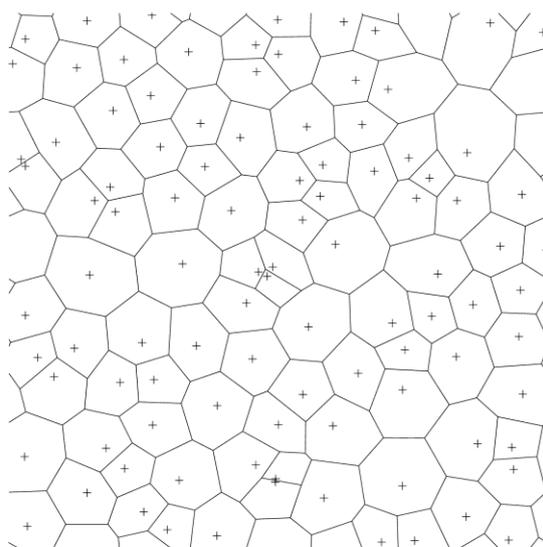
2-D Voronoi Tessellation Network (Periodic)



$N = 100; t = 500000; a = 0, b = 40, c = 0; \Delta = 0.25; V = 10 \times 10$

図 1

2-D Voronoi Tessellation Network (Periodic)



$N = 100; t = 500000; a = 0, b = 0, c = 10; \Delta = 0.50; V = 10 \times 10$

図 2

て、種々のパラメータ値(a, b, c)の組み合わせに対してランダム型・集中型・規則型のボロノイ分割パターンがMCMC法によって実現できることが判明した。その一例を図1、図2に示す。また、パラメータ値の対応関係が明らかになった。

(2) 研究の当初は相互作用ポテンシャルをボロノイ・セルの全辺長、各面積の2項のみで考察したが、各辺長の項を新たに加えることで広範囲のボロノイ分割パターンが実現できた。

(3) シミュレーション・データから相互作用ポテンシャルのパラメータ値を推定する方法として、疑似尤度法(Diggle, Fiksel, Grabarnik, Ogata, Stoyan and Tanemura (1994), International Statistical Review, Vol. 62, pp. 99-117)を採用して、今回の研究の目的に合致するように計算プログラムを改良し、パラメータ推定値を求めることに成功した。たとえば、パラメータの組み合わせ(a, b, c) = (0, 40, 0)の場合(図1参照)、4個の独立なボロノイ分割パターンに対するbの推定値としてそれぞれ41.6, 45.7, 49.7, 45.7を得た。また(a, b, c) = (0, 0, 10)の場合(図2参照)、同様にcの推定値としてそれぞれ12.0, 17.8, 14.3, 14.6を得た。これらの推定結果は疑似尤度を用いている故の偏りが見られるものの、一定程度満足な結果と言える。

(4) 実データへの適用例としてランゲルハンス細胞の多角形分割配置データを上記の方法で解析したところ、パラメータ推定値に対応するMCMCシミュレーションでデータの再現をすることにより、ほぼ満足のいく結果を得た。

(5) 以上の成果はこれまで統計科学の分野では国内外で初めての新しい試みである。国外ではこの分野においてMoellerやBaddeleyらがボロノイ・セルによる空間分割の問題を手がけているが、それらはモデル構築にとどまり統計学的手法としての視点に欠けていた。またBertin et al. (1999)はボロノイ・セルに双対なデローネイ三角形分割を用いた統計的手法を試みているが、それは粒子間の条件をデローネイ隣接粒子に限定する手法であって、ボロノイ・セルそのものを統計的手法の対象とする研究は行われておらず、パラメータ推定に関してもおそらく今回が初めてである。

(6) 研究成果および関連研究の発表として各種の国内外のシンポジウム・学会での口頭発表に加えて、いくつかの学術雑誌への論文公表等を行っている。実データへの解析については成果を論文発表する準備を開始した。その他に、「MCMCとその周辺 - 空間統計と乱数を中心にして」と題する解説論文(石黒真木夫編:近代科学社から出版予定)をま

とめた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

- ① 種村正美、多角形分割データに対するMCMCによる統計モデルII、2010年度統計関連学会連合大会報告集、査読無、2010、120-120.
- ② 種村正美、ボロノイ・セル相互作用モデルによる多角形分割パターンの解析、形の科学会誌、査読無、25巻、2010、200-201.
- ③ Numahara, T., Tanemura, M., Numahara, K., Moriue, J., Shirahige, Y., Yokoi, I. and Kubota, Y. Spatial statistics for epidermal Langerhans cells - Effects of protopic ointment 0.1% on spatial distribution --, Forma, 査読有、Vol. 24, No. 1, 2009, pp. 49-59.
- ④ Honda, H., Nagai, T. and Tanemura, M. Two different mechanisms of planar cell intercalation leading to tissue elongation, Developmental Dynamics, 査読有、Vol. 237, 2008, pp. 1826-1836.
- ⑤ Honda, H., Motosugi, N., Nagai, T., Tanemura, M. and Hiiragi, T., Computer simulation of emerging asymmetry in the mouse blastocyst, Development, 査読有、Vol. 135, 2008, pp. 1407-1414.
- ⑥ Tanemura, M., Voronoi adjustment model on 2-sphere for small number of points, Proceedings of International Workshop VORONOI-2008, 査読無, 2008, pp. 174 - 181.
- ⑦ Dolbilin, N. and Tanemura, M., Voronoi tilings for the Clifford torus in a 3-sphere, Voronoi's Impact on Modern Science, 査読有, Book 4, 2008, pp. 210 - 219.

[学会発表] (計 10 件)

- ① 種村正美、多角形分割データに対するMCMCによる統計モデルII、2010年度統計関連学会連合大会、2010.09.07、早稲田大学
- ② 種村正美、ボロノイ・セル相互作用モデルによる多角形分割パターンの解析、第70回形の科学シンポジウム、2010.11.21、兵庫県立加古川東高等学校
- ③ 種村正美、多角形分割データに対するMCMCによる統計モデル、2009年度統計関連学会連合大会、2009.09.08、同志社大学(京田辺市)
- ④ Tanemura, M. Optimal configuration on

研究者番号：

2-sphere for small number of points,  
ISM Symposium on Stochastic Models and  
Discrete Geometry, 2009.02.19, 統計数  
理研究所

- ⑤ Tanemura, M. Voronoi tilings for the  
Clifford torus in a 3-sphere, 4<sup>th</sup> Int.  
Conf. on Analytic Number Theory and  
Spatial Tessellations, 2008.09.25, キ  
エフ (ウクライナ)
- ⑥ Tanemura, M. Voronoi adjustment model  
on 2-sphere for small number of points,  
International Workshop VORONOI-2008,  
2008.06.12, モスクワ (ロシア)

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

○取得状況 (計◇0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

[その他]

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

種村 正美 (TANEMURA MASA HARU)  
統計数理研究所・名誉教授  
研究者番号：80000214

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

( )