

平成23年 5月 10日現在

機関番号：15301  
 研究種目：基盤研究(C)  
 研究期間：2008～2010  
 課題番号：20500750  
 研究課題名(和文) デザイン実験による算数を数学に接続する理論、実践、教材の総合的開発研究  
 研究課題名(英文) The comprehensive study of developing theory, practice and contents connecting between elementary and secondary mathematics through design experiments  
 研究代表者  
 岡崎 正和 (OKAZAKI MASAKAZU)  
 岡山大学・大学院教育学研究科・准教授  
 研究者番号：40303193

研究成果の概要(和文)：本研究は、算数と中学数学の乖離の問題についてデザイン実験の方法論を用い、算数から数学への移行に関する理論的・実践的知見を明らかにすることを目的としている。代数分野では、算数での割合の認識を中学校の関数学習につなげる移行過程を、幾何分野では、算数での動的な見方や形の認識を中学での証明の見方に変容させる移行過程を構想し、実験授業とその質的分析を行い、移行に関わる知見を抽出し、理論化していった。

研究成果の概要(英文)：This study aims at finding the theoretical and empirical bases on the transition from elementary to secondary mathematics through design experiments. We designed two transitional processes in which students developed their recognitions of functional graphs based on their views of rate and in which they enhanced their recognitions of proof through cultivating their dynamic and flexible views of figures, and implemented the experiments. Then, we have extracted and theorized the findings on the transition by analyzing the data qualitatively.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数学教育学

科研費の分科・細目：科学教育・教育工学，科学教育

キーワード：科学教育，算数と数学の接続，デザイン実験，図形の動的な見方，図形の作図，図形の移動，図形の証明，理論と実践の関係

## 1. 研究開始当初の背景

算数と中学数学の乖離は戦後以来の伝統的な課題であり、近年その研究の必要性は益々

高まっている。学習指導要領の改訂では理数系教育の充実が図られ、削減または中学に先送りされていた内容が再び算数の内容になる

など、算数から数学への移行期における教材の位置は不安定である。世界的にも、算数と数学の接続の研究は活発に行われており、最近では算数を中学数学の目から見直し、算数の充実を図る研究が始められている。

伝統的に生徒は文字式、関数、論証といった内容で躓くことが知られているが、これらを準備する内容と方法が移行期に十分確立されていないことが原因の一つと考えられる。ただし、例えば文字式が算数の内容であった時代にも、算数と数学の乖離が生じていたことに鑑みれば、たとえ内容だけを先取りして学んだところで、移行にはそれほど寄与しないであろう。現実には、子ども達が知識を形式的に学び、知識が活用されにくい状況が起こると考えられる。

本研究ではこれを克服する為に、単元を総合的に展開できる学習環境において、子ども達が活動と協働を通して知識を身につけ、その知識を発展させる中で中学数学との確かなつながりを確保するという視点が重要だと考え、教授学的状況論や記号論を援用しながら理論的枠組みの整備を行ってきた。またデザイン実験の方法論を用いて、小中学校の教師と協働で、正負の数の加減乗除、図形の作図、小数除法の単元開発を通して移行を成し遂げる為の実践的知見を得てきている

## 2. 研究の目的

本研究は、数学教育における「算数と数学の乖離」の問題について、デザイン実験の方法論を用いて、小学校高学年の算数と中学1年の数学の両方の授業開発研究を通して、算数を中学数学に接続する為の理論的基盤、実践的方法論、教材を総合的に開発することを目的とする。

算数から数学への移行過程として、代数領域では「小数除法と割合」を含む単元を「変

化の割合によるグラフの探究」へ接続する過程と、幾何領域では「図形の相互関係と定義の再構成」を含んだ単元を「図形の作図・移動とその論証」に接続する過程を構想する。

前者では、小数除法の意味として割合の見方を理解し、その見方をグラフの探究に活用させ、関数学習の素地を培うことを目指す。関数学習では、変化の割合を通してグラフを見ることに困難がみられ、これを算数から継続的に培う試みである。後者の図形の相互関係は学習指導の困難さにより算数の内容から削除された内容であるが、図形の論証の素地として図形の関係的な見方は不可欠である。図形を作図や移動を通して柔軟に捉え、図形を関係的に見直すことによって、論証へつなげていきたいと考える。

## 3. 研究の方法

本研究は、デザイン実験の方法論に基づいて、理論的研究と実践的研究を往復させながら知見を抽出し、理論化する手法をとる。

まず、教授学的状況論と記号論などを用いて、授業の設計や分析の視点を導出する。また、以前に実施した授業や調査のデータを再分析し、授業設計に必要な視点を確認して、これらを加味することで、授業構成の仮説を設定する。

実践的には、小学校で小数除法・割合に関する授業と、図形の包含関係に関する授業を、また中学校では、変化の割合によるグラフの探究を含んだ関数の授業と、図形の作図と移動に関する授業を、教師と共同で構想し、実践する。授業や調査はビデオカメラ、ICレコーダに記録し、テープ起こしを行う。

次に、グラウンデッドセオリーアプローチの手法を用いて、授業における子ども達の学習過程の特徴を質的に分析し、カテゴリー化していく。教師による手だてや学習環境が果

たした役割なども分析する。

さらに、分析した全データをもとに、算数を中学数学に接続する為の理論的枠組みの構築と洗練を図る。ここでは、算数から数学への移行を捉える上での柱となる視点を導き出し、分析で明らかになった個々の移行要因を各視点に位置づけていく。さらに、算数から数学への移行をグローバルに見て認識の発展の段階を明らかにすること、単元レベルでの学習過程、それらを進展させる要因や教師の手だてを考察する。こうした作業を通して、算数を数学に接続するプロセスや授業構成に関する原理を明らかにしていく。

また、実践的な知見については、地域の教師達を交え、上記の原理や方法に関する知見を含めて、学校で広く使えるようにする検討会を開催し、学校現場に知見を還元していく。

#### 4. 研究成果

##### (1) 図形における算数から数学への移行に関する理論的枠組みの構成

まず、これまでに実施したデザイン実験の再検討と文献研究から、理論的枠組みの骨組みとして、算数的段階（図形の特徴の認識）、移行的段階（図形の関係性の認識）、数学的段階（図形の演繹性の認識）を設定し、移行的段階を、認知的な面、図・図形の面、社会性の面の3つの視点から捉え、以後のデータを分析することとした。

本研究では、中学1年『平面図形』の単元を、図形の発見ゲーム、移動による陣取りゲーム、作図の発見ゲーム（および証明活動）としてデザインし、実験授業を実施し、質的分析の中から、算数での図形から中学での論証の学習への移行過程を捉えるための理論的枠組みを構成していった。

上記の単元構成における3つの小単元の各々を、図形を論理的に位置づけ始める様相、

移動を通して培われる図形認識、移動と作図が証明活動へ繋がる様相として探究し、移行に関わる様相を質的に抽出し、カテゴリ化し、上記の理論的枠組みのもとに位置づける作業を行った。また、各々の要素について、それが生じた要因に関する考察も行った。最終的に、分析を反映させた理論的枠組みは、以下の通りとなった。

##### A. 認知的な面

- (1) 図とその性質を用い、組み合わせで作図を見出す
- (2) 作図の方法が正しいかどうかを帰納的に確かめ、命題を意味づける
- (3) 作図の手続きを正当化の条件として再構成する

##### B. 図・図形の面

- (1) 適切な図を選び出し、作図や推論にそれを用いる
- (2) 図を動的変形を通して変数的に見る
- (3) 図を性質や関係を含んだものと見る

##### C. 社会性の面

- (1) 推測、論駁、合意に基づく学習環境
- (2) 他者からの批判を受け入れつつ、推論を作り発展させる
- (3) 他者の説明を解釈し、よりの確に表現する

##### (2) 図形の関係性に関する移行研究

算数の図形における移行研究として、図形の関係性認識の様相を明らかにすることを目的として、デザイン実験を実施した。

まず、これまでに収集した図形の包含関係の理解に関するインタビュー調査のデータを再分析して、どのように図形の関係性認識が高まるかについての視点を抽出した。次に、この視点をもとにして、小学6年1クラスで図形の動的な見方、図形の包含関係、図形の定義に関する実験授業を、小学校教師と共同

で設計し、実行と反省を繰り返しながら、実施した。

本研究期間内では、主に図形の動的な見方に関する様相を分析した。まず、包含関係を学習せずとも、図形の動的な見方を獲得すれば、包含関係の理解に関する得点の伸びがある（有意差あり）ことが、事前調査と事後調査の比較から明らかになった。ただし、本研究の目的は、むしろこの伸びの理由となる、子ども達が獲得した「図形の動的な見方」とは何かを明らかにすることであった。質的分析を丹念に繰り返した結果、子ども達の動的な見方として「具体的操作(manipulation)」、「理想化と念頭化」、「ジェスチャー」、「図形全体の動きの中で点の動きを捉える」、「不変性を意識化する」、「可逆的な見方」、「不変性と変数性の同時的意識化」の7つを抽出し、それらをイメージ図式のスペクトルのもとに位置づけ、特徴を明確にした。これによって、これまで「図形の動的な見方」と一語で捉えられていたものに、多様な様相が存在することが明らかになった。さらに、スペクトルに位置づけられた個々の動的な見方の系列は、動的な見方の発達のプロセスを示唆しているように思われ、今後の研究の中で明らかにしていこうと考えている。

### (3) 図形の証明授業の質的分析研究

中学校の証明指導のあり方についても検討を行った。小中学校の推論指導を一貫させる理念として「探究的活動として証明」が根底に流れていることを文献研究において確認した上で、その実現のためには、形式的証明を導入する前の活動を充実させる必要があることを主張した。特に、推論だけでなく、図形の身分を押し上げていく学習過程を構想すること、作図や移動の学習を活かして、それと証明活動とを関連づける授業を構想し、実践

研究を行う必要性について言及した。

また、もう一つの研究として、証明指導の現状分析も行った。附属中学校で証明の授業観察とデータ収集を行い、その質的分析を通して、教師が証明指導で講じている手立てを、教室文化との関わりとして明らかにした。しばしば証明指導が上手くいかない原因が、教師の問題にされることがあるが、本研究で分析した教師は、証明研究の知見に相当することを、授業の中で少なからず語っていることが明らかになった。もちろん、教師が語ればよいものではなく、教師の語りと実際に生徒が身に付けることは別物であり、従って教室での相互作用のあり方を検討していかなければならないと考えるが、ここでの分析結果は、そうした研究よりも、むしろカリキュラム自体の問題が大きいことを示唆していると考えられる。

### (4) 小数除法の学習における移行研究

算数における移行研究として、小数除法の単元において、小数倍の理解を培うための場として崖の傾斜度を比較する場面を位置づけて、小数倍の理解を操作教具による学習で高めながら、崖の傾斜の探究がグラフの傾きの認識に繋がるかどうかを調べるデザイン実験を実施し、その分析を行った。

その結果、傾斜を除法（割合）で捉えるまでには、傾斜を表す直角三角形の縦の長さや横の長さを変化させながら、両者を調整する過程が必要であり、ここに傾きの認識の克服すべき点があることが分かってきた。また、二重数直線上での測定活動によって、小数倍の意味や数直線自体の意味が明らかにされること、これらの認識がグラフの傾きの認識に繋がることも分かってきた。特に、純小数倍を理解すること、その困難性を克服することが、割合としての除法の意味の認識に大きく関わっており、この学習を丁寧に行っていく

必要があることが示唆された。

(5) 一次関数の学習に関する教授実験

中学での移行過程の研究として、公立中学校2年生8名に対して、教授学的状況論を抛り所としつつ、簡易式の一次関数探究学習具と関数に関するソフトウェアを用いて、学習過程の設計を行い、放課後を使って教授実験を実施した。ここでは生徒たちの議論の発生とその進展の過程を追いかけながら、グラフを中心とした一次関数の単元設計の可能性を探究した。その結果、グラフを通して事象を読み取り解釈する過程が幾つか見えてきた。今後の研究の中で、授業として再設計し、移行の様相を明らかにしたいと考えている。

(6) 理論と実践を結ぶ研究方法論

数学教育における理論と実践を結ぶ研究方法論についても検討を行った。

数学教育学研究のアイデンティティと学際性を考える中で、授業の複雑性を探究する為に、理論、実践およびそれらの関係性を捉え直し、実践を理論化するプロセスを丁寧に行う必要性について述べるとともに、その実際の過程を示した。特に、グランド理論と局所的理論と実践の場の間との関係性を考慮することと、デザイン実験の方法論がこうした探究を可能にし得ることに言及した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計19件)

- ① 岡崎正和, 影山和也, 岩崎秀樹, 和田信哉, 図形学習における動的な見方の具体化: イメージ図式の視点をもとにして, 数学教育学研究, 査読有, Vol.16, No.2, 2010, pp.1-10
- ② Masakazu Okazaki, Development of reasoning ability towards proof using seventh grade Plane Geometry, Proceedings

of the 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education, 査読有, Vol.2, 2010, pp.188-195

- ③ 岡崎正和, 探究的活動としての証明を実現するために: 形式的証明導入前の活動を充実させる, 第43回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表収録, 査読無, 2010, pp.39-44
- ④ 住友祐子, 岡崎正和, 証明の学習を促進する教師の指導行為に関する質的分析研究, 第43回数学教育論文発表会論文集, 査読有, 2010, pp.289-294
- ⑤ 岡崎正和, 高本誠二郎, 図形の移動を通して培われる図形認識 - 論証への移行を目指したデザイン実験一, 日本数学教育学会誌, 査読有, Vol.91, 2009, pp.2-11
- ⑥ 岡崎正和, 高本誠二郎, 移動と作図の総合を通じた論証への移行過程 - 中学1年『平面図形』のデザイン実験(3)一, 数学教育学研究, 査読有, Vol.15, No.2, 2009, pp.67-79
- ⑦ Masakazu Okazaki, Process and means of reinterpreting tacit properties in understanding the inclusion relations between quadrilaterals, Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 査読有, Vol.4, 2009, pp.249-256
- ⑧ 影山和也, 集合の考えを生かした図形指導の一考察, 愛知教育大学数学教育学会誌, 査読無, Vol.51, 2009, pp.29-35
- ⑨ 高本誠二郎, 岡崎正和, 図形の論理的位置づけの初期の様相について - 論証への移行を目指した中学1年『平面図形』のデザイン実験(1)一, 数学教育学研究, 査読有, Vol.14, 2008, pp.41-50
- ⑩ Masakazu Okazaki, Learning of division with decimals towards understanding functional graph, Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd PME and the 30th PME-NA,

査読有, Vol. 4, 2008, pp. 65-72

⑪ 岡崎正和, 小数除法における算数から数学への移行研究(2)－純小数倍の理解をめぐる－, 第41回数学教育論文発表会論文集, 査読有, 2008, pp. 273-278

⑫ 和田信哉, 小数の乗法の意味に関する記号論的考察, 数学教育学研究, 査読有, 2008, pp. 9-18

⑬ 岩崎秀樹, 山口武志, 比例的推論に基づく分数除の教授・学習に関する批判的考察, 第41回数学教育論文発表会論文集, 査読有, 2008, pp. 345-350

[学会発表] (計5件)

① 岡崎正和, 算数・数学教育における小中連携の視点について, 岡山大学算数・数学教育学会, 2010年10月30日, 岡山大学教師教育開発センター

② 岡崎正和, 数学教育における理論と実践の関係性：特に, 実践の理論化に焦点を当てて, 全国数学教育学会第32回研究発表会, 2010年6月26日27日, 広島大学

③ 影山和也, 岡崎正和, 岩崎秀樹, 和田信哉, 図形の動的な見方の構造化：比喻の視点から, 全国数学教育学会第32回研究発表会, 2010年6月26日27日, 広島大学

④ 岡崎正和, 岩崎秀樹, 影山和也, 和田信哉, 図形における動的な見方の具体化：図形におけるイメージ図式の構造化を視野に入れて, 全国数学教育学会第31回研究発表会, 2010年1月23日, 大分大学

[図書] (計3件)

① 岩崎秀樹, 岡崎正和, 他, 聖文新社, 新数学教育の理論と実際<中学校・高等学校(必修)編>, 2010, 276

② 中原忠男, 岩崎秀樹, 岡崎正和, 他, 東洋館出版社, 数学教育学研究ハンドブック, 2010, 464

③ 岩崎秀樹, 他, ミネルヴァ書房, 新しい学びを拓く 数学科 授業の理論と実践, 2010, 237

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

岡崎 正和 (OKAZAKI MASAKAZU)  
岡山大学・大学院教育学研究科・准教授  
研究者番号：40303193

### (2) 研究分担者

岩崎 秀樹 (IWASAKI HIDEKI)  
広島大学・大学院教育学研究科・教授  
研究者番号：50116539

影山 和也 (KAGEYAMA KAZUYA)  
愛知教育大学・教育学部・准教授  
研究者番号：60432283

和田 信哉 (WADA SHINYA)  
新潟大学・教育学部・准教授  
研究者番号：60372471