

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月 1日現在

機関番号：53901

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2011

課題番号：20500767

研究課題名（和文）「ものづくり」事例から導入する線形代数の有意義学習の実践的研究

研究課題名（英文）Educational Practice on More Meaningful Teaching/Learning of Linear Algebra Starting from Real-Life Applications

研究代表者

西澤 一（NISHIZAWA HITOSHI）

豊田工業高等専門学校・電気・電子システム工学科・教授

研究者番号：40249800

研究成果の概要（和文）：本研究では、線形代数、特に空間図形のベクトル方程式の理解度が低い原因が、抽象的な記号処理に終始している教育内容にあると考えた。これを改善すべく、学生に身近な応用例を出発点に、現実感を持って学べる学習体系の構築をめざした。具体的には、「ものづくり」の応用例からの導入し、実体模型と3次元グラフィックスを用いたモデル化と仮想実験を経て、ベクトル表現を解説する授業プランを作成、実践し、その教育効果を検証した。

研究成果の概要（英文）：We had presumed that major causes of students' poor achievement in linear algebra were too high abstractness and distance of the lessons from real world applications. To compensate this situation and deepen the students' conceptual understanding, we redesigned our lesson-plan to be directed from concrete examples towards abstract mathematical ideas, from handling graphic objects and observing their characteristics towards building vector equations and manipulating them symbolically. The new lessons are changing our students' learning style from black-box approach to more meaningful one.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：科学教育・教育工学 ・ 科学教育

キーワード：ものづくり，線形代数，有意義学習，空間図形，ベクトル方程式，国際研究者交流

1. 研究開始当初の背景

近年、日本の数学教育（中等教育）の現場では学習の表面化が進行しており学生・生徒が、数学の試験直前に公式・解法を丸暗記し、理解せぬまま単位取得することも珍しくない。この傾向は、理系の学問基盤を揺るがし、高度な科学技術の発展に頼る日本社会の将来を危うくする可能性があ

る。

申請者等は、勤務校（豊田高専電気・電子システム工学科）における基礎数学教育実践を通じて、学習の表面化に抗して学生の理解度を深めるため、文字式計算過程からの誤り分析と学習者の理解度推定、Web 学習支援システムへの自動助言機能の実装、三表現（数式、図形、文章）の関連強化等の実践的な研

究を行ってきた。この結果、勤務校学生の基礎解析（関数および微分積分）分野の到達度は顕著に改善，工学基礎科目の充実につながっている。しかしながら，線形代数（特に，三次元ベクトル）の分野では，学生の到達度が他分野に比べて低いままである。学生答案からは，学習の表面化の兆候が見取れる。

2. 研究の目的

本研究では，線形代数の学習が，現実事象から切り離された抽象的な記号処理に終始していることが，学生に現実感を喪失させ学習の表面化を助長していることに注目，工学系学生に身近な「ものづくり」の事例を出発点に，学生が現実感を持って学べる学習体系の構築をめざす。具体的には，実体模型と3次元グラフィックスを活用した数学的モデル化を教室に持ち込み，3次元空間図形の仮想実験を個別学習の可能なWebシステムに実装し，教室における授業，演習と組み合わせることで，学習者が現実感を持ちながら，線形代数の仕組みを学ぶことのできる有意味学習の実現をめざす。

3. 研究の方法

(1) 線形代数の理解度評価

線形代数（3次元ベクトル）に関する学生の理解度を測定する指標を抽出するため，線形代数の演習における学生答案の定性的分析を行うとともに，受講終了9ヶ月後に行われる実力試験（国立高等専門学校学習到達度試験：数学，以下，到達度試験と略称）における，線形代数分野の正答率を，他の分野の正答率と比較し，学生の達成度を定量評価する。また，新しい授業プラン(3)を含む本研究の効果も，最終的には到達度試験で測定する。

(2) 「ものづくり」事例の抽出

工学系学生に身近な「ものづくり」事例として，観光都市（旧市街）における観光案内戦略，ロボカップ小型機部門におけるボールの挙動，対戦型ゲームとアバターの設計等を検討し，線形代数学習の動機付けとなり得るかを検討する。

(3) 具体から抽象に向かう授業プランの作成
実体模型による空間図形のモデル化と3次元グラフィックスを用いた仮想空間でのモデル化を用いた授業プランを作成し，このプランに基づく授業を実践，受講学生の反応観察し，教育効果を測定する。

(4) インタラクティブな学習活動の試行
上記授業プランに組み込む学習活動として，ベクトル方程式と3次元空間図形（直線，平面）をインタラクティブに変換し，相互の関係を体験的に学習する演習支援システムを構築し，モニタ学生による試験授業を通して，その可能性を評価する。

4. 研究成果

(1) 線形代数の理解度評価

「線形代数」受講生答案から，学生の理解度を推定する指標を抽出することは容易ではなかった。出題範囲が限定された試験では，解法の丸暗記等に頼る理解の浅い学生を，その答案から検出することが難しいためである。

しかし，受講終了の9ヶ月後に行われる出題範囲の広い到達度試験では，理解度の深さを測定できることが分った。到達度試験の学習領域別得点では，他の領域に比べて「空間ベクトル，行列の計算」の正答率が極端に低く，本研究に基づく授業実践の成果を測定する一指標として，同試験の領域別正答率を利用できることが分かった。

表1 到達度試験の領域別正答率の差
「⑧空間ベクトル，行列の計算」
－「⑦微分・積分の応用」

⑧－⑦	全国平均	本校	E科*
2006年度	2.4%	-9.2%	-14.2%
2007年度	-5.6%	-15.4%	-25.4%

*電気・電子システム工学科（以下，E科と略称）

表1の数値は2006,2007年度の到達度試験における「⑧空間ベクトル，行列の計算」の領域別平均正答率から「⑦微分・積分の応用」の平均正答率を引いた値であり，この値がマイナスになるほど，「⑦微分・積分の応用」に比べ「⑧空間ベクトル，行列の計算」の正答率が低いことを示す。本校，特にE科では，いずれの年度も，この数値が全国平均よりマイナス側に大きく振れており「⑧空間ベクトル，行列の計算」の学習到達度が相対的に低かった。

(2) 「ものづくり」事例の抽出

①観光都市（旧市街）における観光案内戦略



図1 案内ロボットの設計事例

線形代数の応用例として最初に検討したの

は、街路の入り組んだ観光都市における案内ロボットの最適経路計算である(図1)。

経路の各行程選択時に、有効移動距離を計算するために2次元ベクトルの内積を用いるため、学生が最も暗記に頼りがちである、3次元空間中の点 (x_0, y_0, z_0) と平面 $ax+by+cz+D=0$ との距離 d を求める

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + D|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (1)$$

式の導入に使うことができると考えた。

②ロボカップにおけるボールの挙動

2つ目の例は、本校が参加するロボカップ(小型機部門)である(図2)。ロボカップでは1チーム5台の全自動ロボットが、ゴルフボールを用いてサッカーを行う。ボールやロボットの速度はベクトルで、ボールの現在地は位置ベクトルで、軌跡は直線で表現される。パスしたボールが敵にインターセプトされるか否かは、ボールと敵ロボットの速度ベクトル、軌跡と敵ロボットの距離で推定でき、ヘディング後のボールの方向はロボットの(反射板の)方向ベクトルで制御できる。敵ロボットによるインターセプト問題を、ボールの軌跡と敵ロボットとの最短距離計算と捉えることで、(1)式につなげることができる。

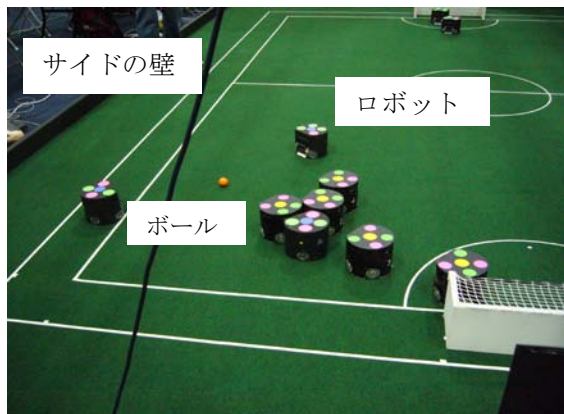


図2 ロボカップ(小型機部門)の一場面

しかしながら、これらの事例は、2次元ベクトルの応用例に止まり、3次元ベクトルの学習動機付け効果は限定的であることが分かった。

③対戦型ゲームとアバターの設計

そこで、3次元ベクトルの応用例として、対戦型の仮想ゲームを製作した(図3)。このゲームでは、学生が3次元ベクトルを用いて特性を設定したアバター同士を対戦させ、競技ベクトルと各アバターベクトルとの内積の大小により勝

敗を決めている。この事例は、特に、テレビゲーム等で仮想空間に親しんでいる学生に現実感を与えるようで、受講生からは、初めて3次元ベクトルの応用例を見たという好評を得た。

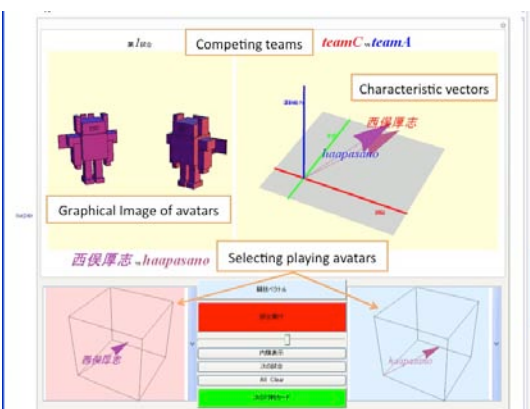


図3 仮想ゲームの対戦表示画面

(3) 具体から抽象に向かう授業プラン

①新しい授業プラン

空間ベクトルの授業においては、公式の導出過程を詳しく解説し、途中計算の記述を重視した演習を行うだけでは、学生の理解を深めることはできなかった。ベクトル方程式のように抽象性の高い数式は、具体的な応用例や関連する図形の特徴と関連させずに学ぼうとすると、単なる式変形のパターン認識へと無意味化してしまう。しかしながら、特に低進学生は、目の前の試験で得点するために、(所謂一夜漬けで)公式と解法を暗記はするものの、図形と数式の特徴を結びつけて考えるような(一見得点効率の悪いと思われる)学習は行わない。表面的な記憶は短期間で消失するため、いつまでも線形代数は未学習と変わらない状態に止まり、学習到達度が低迷することになる。

このことは、指数・対数、三角関数や微積分が、物理や工学基礎理論との深い関わりから、物理モデルと深く関連付けて学ばれるため、充実した演習後は学年進行とともに理解度が深まるのと対称的である。

そこで、表2に示す新しい授業プランでは、従来型の通常授業で、ベクトル方程式の導出課程を解説する(ステップ5の)前に、空間図形の視覚的イメージを持たせる。さらに、空間ベクトルの学習動機付けとして、工学分野における空間ベクトルの身近な応用例として図3の仮想ゲームを用いることにした(ステップ1)。このゲームでは、事前に学生が3次元ベクトルを用いて特徴付けを行ったアバター同士を対戦させ、競技ベクトルと各アバターベクトルとの内積の大小により勝敗を決めるのであるが、教室内のプロジェクタに図3を投影して、導入授業としての対戦ゲームを行った。

表2 空間図形の授業プラン

ステップ	内容		時間
1	応用例を知る	三次元ベクトルにより勝敗を決する仮想ゲームを体験する	課外活動と45分授業
2	実物に触れる	棒と平板を用いて、空間図形の平行、垂直関係を体験	25分授業
3	空間図形を作画、特徴を観察	図1のWebページで、ベクトルを用いた空間図形の定義・作画法を体験	低進度学生課外活動
4	空間図形とベクトル方程式の関係を観察	方程式の係数と図形を同時に変形できる図2のソフトを用いて、空間図形、特徴の説明文とベクトル方程式の関係を把握する	低進度学生課外活動
5	ベクトル方程式を導出	ベクトル方程式の導出過程(通常授業)	90分授業
6	計算演習	紙と鉛筆を用いた演習。計算過程の説明を重視	演習と課外演習
7	相互解説	小グループで、互いの解法を説明し合う	課外活動

授業プランでは、仮想ゲームの後に3次元物体を用いた視覚化の導入を行う。具体的には、各学生の机を3次元空間中の xy 平面と位置づけ、実物(棒や平板)を用いて、実物体の平行、垂直等、物体間の関係を机上の空間で確認させ(ステップ2)、空間図形をイメージする練習をする。

その後、3Dグラフィックスの助けも借りて、仮想空間内で図形を作画、変形操作させ、直線、平面等の基本空間図形と矢印で表されるベクトルとの視覚的な関係を学生が自ら観測する活動を行わせる(ステップ3)。空間図形の操作体験を通して直線、ベクトル、平面の図形的な特徴に気づき、平行や直交等、図形間の関係を視覚的にイメージできることが、図形と数式を関連付ける前提となると考えるからである。

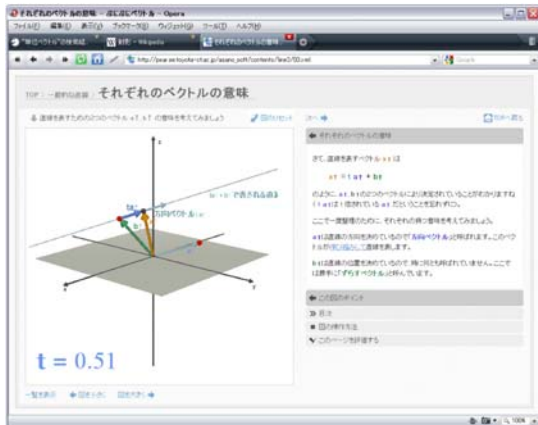


図4 空間図形の特徴観察(2009年度版)

具体的には、3D作画ソフトCabri 3Dと、同ソフトを用いて作成したインタラクティブなWebページ(図4)を用いて、空間中の直線と平面の平行・垂直関係と、3次元ベクトルを用いた空間図形の固定化を、視覚的に確認させる。このステップでは、画面に参考表示されるベクトル方程式よりは、空間図形とベクトルの図的關係(視覚イメージ)に集中させる。

次に、空間図形とベクトル方程式を関係付ける(ステップ4)。ここでは、HaapasaloのMODEM理論に従い、図形の変形と数式のパラメータ変化の同時性を重視する。図形の特徴と数式の関連性に学習者自らが気づき、規則性を認識できるよう、数式処理ソフトMathematicaを用いて、体験用プログラムを作成した(図5)。

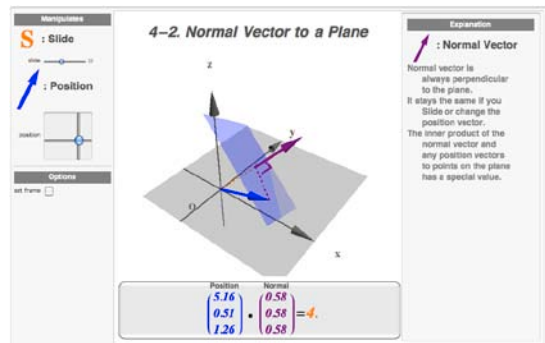


図5 空間図形とベクトル方程式の関係

このソフトでは、画面左側に配置されたスライダをマウスで操作すると、画面中央に表示された図形と数式(のパラメータ)が同時に変化する。さらに、画面右側に配置されたボタンをクリックすることで、より特徴的な図形、例えば、 z 軸に垂直な平面と同平面を表すベクトル方程式を同時に表示できる。2つの方向ベクトルの z 成分が、いずれもゼロになることに気づけば、ベクトルの図形的イメージと数式の特徴を自ら関連付けるきっかけとなる。

図6 公式(1)の導出解説例

平面と点の距離の求め方:

$$d = |\vec{n}_0 \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \frac{|ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|D - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

平面:
 $ax + by + cz$

平面の単位法線ベクトル:
 $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

点Pから点Qへ向かうベクトル:
 $\vec{x} - \vec{x}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

平面中の任意の点Qを示す位置ベクトル:
 $\vec{x} = (x, y, z)$

点P: $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

距離の公式:
 $d = |\vec{n}_0 \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)|$

これら一連の操作体験後に、従来の解説と

計算演習を行う。解説（ステップ5）では、教員が空間図形の図的特徴からベクトル方程式を導出し、方程式が図形の特徴を体現していることを学生に再認識させる（図6）。

また、計算演習（ステップ6）では、前出の式(1)のような公式の使用を避け、図6のように、図形からベクトルを用いて公式を導出する過程を、途中計算として、毎回各自が紙上に表現するよう指導した。最後のステップ7では、学生が少人数のグループに分かれ、交代で自らの解法を説明し合う。

②授業の実施状況

これらの授業実践は、電気工学の基礎科目である電気回路、電気磁気学に必要な基礎数学の演習時間を確保するために1998年度に導入された専門科目：「電気数学」（2年，通年2単位）で行った。表1中の時間は、（2011年度実施のステップ1を除き）2009年度の授業で使用した時間である。

授業の各ステップは、表3に示す年度に順次導入している。まず、2005年度に空間ベクトルの問題を計算演習（ステップ6）に加えた。2006年度から始めた方程式導出解説（ステップ5）を受講した学生は、3年に進級した2007年度に学習到達度試験を受験している。

表3 授業プラン各ステップの導入時期

年度	ステップ						
	1	2	3	4	5	6	7
学習到達度試験							
2006						○	
2007					○	○	
2008					○	○	
2009		○	△		○	○	
2010		○	◇	□	○	○	

○：全学生向け授業，△：低進度学生（1/3）向け補習，
◇：低進度学生（1/3）向け補習（Webシステム改良），
□：低進度学生（1/3）向け補習の試行

2008年度と2009年度の2年生のうち、クラスの約1/3の低進度学生は、時間外の補習で空間図形の操作体験（ステップ3）か、空間図形とベクトル方程式の関係把握（ステップ4）のいずれかの活動を行っている。この活動は、学生2名が1組となり、各1台のPC端末を共有し、互いに相談しながら約90分の体験活動を行ったものである。活動中はソフト開発を担当した5年生学生が常駐し、参加学生からの質問、相談に答えている。後述するインターフェースの改良により、2008年度と2009年度のステップ3の学習活動には、質的な違いがあったようである。ステップ1の仮想ゲームは、2011年度の導入であり、学習到達度試験による効果測定は2012年度以降となる。ステップ7の相互解説は2007年度に試行したが、定常的な活動として定着するには至っておらず、今後の課題である。

③授業の効果

図7の学習到達度試験（⑧空間ベクトル，行列の計算）得点から、授業プランの各ステップの効果を検討する。尚、図7中の比較群は、「電気数学」非受講の同学年学生中、新入生学力試験「数学」の成績が実験群に最も近い学生群（約40名）である。

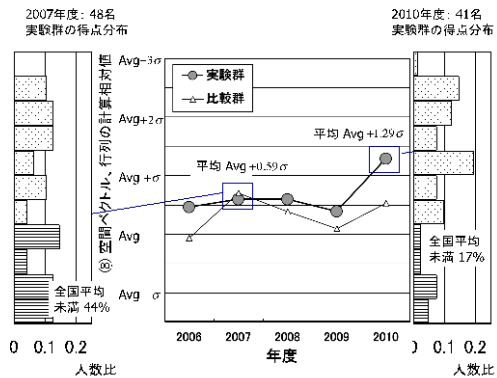


図7 学習到達度試験の得点変化

学習到達度試験の得点は、それぞれの前年度に、授業解説（ステップ5）と演習（ステップ6）を改良した2007、2008年度と、実物での体験（ステップ2）を追加した2009年度の実験群は、授業解説（ステップ5）導入前の2006年度に比べて（「電気数学」定期試験の平均点は上昇していたものの、）授業終了約1年後に行われた学習到達度試験の平均点は、ほとんど変わっていない。2006年度の学生と同様、理解が浅いためか、学習内容が短期の記憶に止まったものと考えている。

これに対し、インターフェースの改良された空間図形の操作（ステップ3）または図形と方程式の関係把握（ステップ4）を、低進度学生が体験した2010年度では、学習到達度試験平均点が有意に上昇している。特に、得点分布を2007年度と比較すると、全国平均以下の低得点学生比率が半減しており、主として低進度学生の得点が底上げされていることが分かる。

ただし、低得点学生の減少は、図形操作体験（ステップ3,4）の直接的な効果とは考えにくい。対象学生の仮想空間での体験時間は、それほど長くなく、この体験時間内に理解が格段に進んだようには見えなかったからである。むしろ、この仮想体験で得た視覚的イメージが、もしくは、空間図形を視覚的に捉えたとこの分野は理解しやすくなると学生が感じたことが、その後の学習行動を変えたのではないか。授業、演習に従来の低進度学生より積極的に取り組み、もしくは、より視覚的イメージを活用して、より有意義な学習を行い、理解度を深めたものと推定している。仮想空間での操作体験は、その後の学習活動

に学生が視覚的イメージをより積極的に活用することで、効果を上げることができるのであり、本報授業プランのステップ 5, 6 のベクトル方程式の導出解説、計算過程の説明を重視した演習（紙と鉛筆を用いる）を伴って初めて、効果が出るものと理解している。このことは、授業プランとしては、ほぼ同様の活動を行った 2008 年度（学力到達度試験は 2009 年度）では得点上昇がなかったにも拘らず、2009 年度（学力到達度試験は 2010 年度）では顕著に得点が増加したことの説明にもなる。すなわち、2008 年度の仮想空間体験は、対象学生に視覚的イメージの有用性を十分に伝えることができなかつたのではない。

(4) 研究成果のまとめ

本研究の結果は、線形代数のように抽象性の高い学習内容では、演繹的な授業解説法の工夫だけでなく、事前に学習者の体験不足を補うことで、帰納的納得を得ることができれば、特に低進度学生の理解を深め、学習の表面化を防ぐ可能性があることを示している。

線形代数、特に空間図形のベクトル方程式に関する、学生の理解度深化のため、具体から抽象へ導き、図形と数式の関連付けを重視した授業プランを実践、改良し、その効果を学習到達度試験で確認した。特に、数式表現の原理や操作法を詳しく解説する前に、3次元グラフィックスを活用した空間図形の操作体験により、視覚的イメージの有用性を体験させたことにより、学生がその後の学習活動をより有機的に行い、空間図形の理解度を深化させ、学習後の空白期の後にも定着する可能性が見えたことは、価値がある。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 5 件)

- 1) 西澤一, 吉岡貴芳, “具体から抽象へ向かう線形代数の理解度深化の試み”, 論文集「高専教育」第 35 号, pp215-220 (2012), 査読有.
- 2) Nishizawa, H., Yamada, Y., Yoshioka, T., “The Effectiveness of ICT-assisted Approach in Learning 3D Linear Algebra”, Proc. 16th Asian Technology Conference in Mathematics, pp281-290 (2011), 査読有.
- 3) Nishizawa, H., Yamada, Y., Yoshioka, T., “Virtual Game for Deepening Students’ Conceptual Understanding of 3D Vector Operations”, Proc. International Conference Virtual and Augmented Reality in Education, pp. 30-34 (2011), 査読有.
- 4) Nishizawa, H., Zraggen, B., Yoshioka, T., “A System of Helping Concept-Building in 3D Linear

Algebra by Connecting Graphics, Symbolic, and Verbal Representations”, Proc. The Electronic J. of Mathematics and Technology, 4-2, pp. 175-183 (2010), 査読有.

- 5) Nishizawa, H., Yoshioka, T., “A Proposal to Teach 3D Vector Operations in a Role-Playing Game”, Proc. 13th Asian Technology Conference in Mathematics, pp.364-369 (2008), 査読有.

[学会発表] (計 6 件)

- 1) 西澤一, “具体から抽象へ向かう線形代数の理解度深化の試み”, H23 年度全国高専教育フォーラム教育研究活動発表会, 2011 年 8 月 25 日, 鹿児島大学.
- 2) Yamada, Y., “The Tournament: Virtual Game Using 3D Vectors”, International Conference “Virtual and Augmented Reality in Education”, 2011 年 3 月 18 日, Vidzeme University of Applied Sciences, Latvia.
- 3) Nishizawa, H., “MATHEMATICA module Showing Dynamic Link of 3D Graphic Objects and Vector Equations”, 15th Asian Technology Conference in Mathematics, 2010 年 12 月 19 日, University of Malaya, Malaysia.
- 4) Asano, T., “Cabri 3D Module to Visualize the Construction of 3D Vector Equation”, 14th Asian Technology Conference in Mathematics; 5) Kishi, N., “Software Module Showing Dynamic Link of 3D Graphic Objects and Vector Equations”; 6) Yamada, Y., “Constructing a Game for Introducing 3D Vector Operations”, 2009 年 12 月 19 日, Beijing Normal University, China.

[その他]

ホームページ等

線形代数学習システム「ぶにぶにベクトル」
HP (<http://orchard.ee.toyota-ct.ac.jp/>)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

西澤 一 (NISHIZAWA Hitoshi)
豊田工業高等専門学校・電気・電子システム
工学科・教授
研究者番号: 40249800

(2) 研究分担者

吉岡 貴芳 (YOSHIOKA Takayoshi)
豊田工業高等専門学校・電気・電子システム
工学科・准教授
研究者番号: 30270268