様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　６月　６日現在

機関番号：　１１２０１
研究種目：　基盤研究（C）
研究期間：　2008　～ 2010
課題番号：　20540002
研究課題名（和文）　素数のべき乗に関わる整数の加法的問題の研究.

研究課題名（英文）　Research on additive problems concerning powers of primes.

研究代表者
川田　浩一（KAWADA　KOICHI）
岩手大学・教育学部・准教授
研究者番号：７０２７１８３０

研究成果の概要（和文）：加法的問題に付随する例外集合の密度評価を与える Wooley の方法を応用する際，Davenport の Diminishing range method が効力を発揮する場面があることを発見した．この方法は，様々な加法的問題に適用することができ，とくに３乗数及び４乗数の Waring 問題に付随する例外集合に対する新しい密度評価等の成果を得た．また，素数か，または２つの素数の積であるような８個の自然数の３乗の和として，充分大きい全ての自然数を表せることを示した．

研究成果の概要（英文）：We discovered that under certain circumstances, Davenport’s diminishing range method has significant effects on the application of Wooley’s method which provides sharp estimates for exceptional sets associated with additive problems. This method may be applied to various kinds of additive problems, and amongst others, we established new estimates for exceptional sets associated with sums of cubes, or biquadrates, of prime numbers. Also, we showed that every sufficiently large integer can be written as the sums of eight cubes of natural numbers that has at most two prime factors.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	800,000	240,000	1,040,000
２００９年度	600,000	180,000	780,000
２０１０年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総　計	2,100,000	630,000	2,730,000

研究分野：　解析的整数論
科研費の分科・細目：　数学・代数学
キーワード：　Waring 問題，Waring－Goldbach 問題，素数，べき乗数，加法的問題.

１．研究開始当初の背景

(1) べき乗数の和によって自然数を表現する問題は 1770 年の Waring の著書に端を発するものであるが，それが素数のべき乗数の和に関しても考察されるようになったのは，Vinogradov が 1937 年に３変数の Goldbach 問題について画期的な成果を挙げた直後の Hua の研究からである．その後，1940 年ごろの Davenport の手法,1980 年代半ばの Vaughan, Thanigasalam の研究を経て,2001 年に Wooley と川田は，素数のべき乗に付随する Weyl 和に対する評価とその円周法への応用によっ

て，とくに４乗と５乗の場合について成果を得た.

素数に限らず，素因数の個数が少ない概素数に対して同様の問題を考えることは，とくに 1990 年代半ばの Brüdern の一連の研究を契機として，川田らにより研究がされてきたが，この種の問題には， Wooley と川田の上記の手法を適用する際に関わる篩の構成に工夫を加えることにより，更なる進展の余地があると期待し，この研究を始めた.

(2) 加法的問題における例外集合の密度評価に関しては，2002 年ごろに Wooley が新しい方法を発見し，ある状況の下ではその方法により従来の結果が画期的に改良されることがわかっていた.この Wooley の方法が，素数のべき乗数の和に関する問題に対して与える影響を解明しようとすることも，この研究を始める動機の一つであった.

２．研究の目的

素数のべき乗数の和として自然数を表現することに関わる様々な問題は，加法的整数論と素数分布の理論が交錯する興味深い研究分野として，Waring-Goldbach 問題を中心に，これまで多くの数学者によって研究が行われてきている．この研究では，円周法と篩の方法を基に，従来の研究の限界を少しでも破る結果を得ることを最も中心的な目標としつつ，ある決められた形の素数のべき乗の和として表せない自然数が有限であることが示せない場合には，そのような例外的な自然数の密度が少ないことを具体的な評価によって示す，あるいは，素数に近い概素数と呼ばれる数を素数に置き換えることで対応する結果を得る，といった，主目的の周辺に付随する様々な問題について研究を進めることも目標とした.

３．研究の方法

(1) 本研究は，川田浩一が研究代表者となり，同じ学部に所属する教授・押切源一氏を研究分担者とし，この２名で研究組織を構成した．代表の川田が，円周法や篩法に基づく研究を中心的に進め，円周法応用の際に必要となる曲面上の有理点に関わる扱いなどの幾何学的な観点が要求される部分の考察，および篩法に関わって現れる多重積分をコンピューターで近似計算する作業を押切氏の分担とした．本研究の進展について基本的に 2 週間に 1 度の割合でセミナーを行い議論し，川田が随時状況を検討し，進め方を立案し，最終的に全体のまとめも川田が主体となって行った.

(2) 研究成果の発表は,Canada の Waterloo 大学で開かれた Canadian Number Theory Association X Meeting と，France の Lille 大学で開かれた Additive and Analytic Activities Conference にて行った.とくに，後者に出席した際は，この分野で世界的に活躍する研究者である Brüdern，Wooley 両氏と議論をする機会を得て，今回の研究のさらなる進展のきっかけを得ることとなった.

４．研究成果

(1) Waring 問題の研究において，自然数をある個数のべき乗数の和としてあらわす方法の数の平均的挙動は 1920 年頃から研究対象となっているが，その方向の結果を表現の数のべき乗平均に対する漸近式として明示することは，最近の Brüdern と Wooley の研究によって注目され始めている．その際の平均をとる自然数列を，自然数全体とせず，任意に固定された多項式の値の集合に限定したうえで，対応する表現の数のべき乗平均に対して漸近式を証明する技法を，上

記２名と共同で考案し，Tsukuba J. Math. 誌に発表した．

そこにおいては，$R(n;s)$を，s 個の 3 乗数の和で n を表す方法の数とし，$f(x)$を，x が整数である限り整数値をとるような多項式で最高次の係数が正であるものとし，さらに，h を正の実数として，$R(f(n);s)$の h 乗を x 以下の自然数 n に対して足し合わせた和を主な考察対象とした．そして，次のそれぞれの条件の下で，その総和に対する漸近式を証明することに成功した：(i) $s=6$，f は 2 次，$0<h\leqq 2$，(ii) $s=7$，f は 2 次，$0<h\leqq 4$，(iii) $s=7$，f は 3 次，$0<h\leqq 2$．

この手法は３乗数の場合に限らず，一般の Waring 問題に応用できるものであり，実際その論文においても指数の大きい Waring 問題の場合への適用例も紹介した．

(2) クローが無いグラフに対して，付随した２次元単体的複体が単連結ならばハミルトン性を持つことと，任意の２つの辺が２次元単体を通して移動可能ならばハミルトン性を持つことを，押切が証明し，岩手大学教育学部紀要に発表した．

(3) 充分大きい自然数 N が偶数で，9 を法として±1，±3 と合同でなく，かつ 7 を法として±1 と合同でないならば，N は次のような 4 つの 3 乗数の和の形で 表されることを証明した；

$$N=p^3+q^3+m^3+n^3,$$

ただし，p と q は素数，m と n は素数であるか，または２つの素数の積となる自然数である．

3 乗数の Waring－Goldbach 問題に関して，高々3 つの素数の積となるような８個の自然数の和として，充分大きいすべての自然数を表すことができることが知られていたが，この命題における８個の３乗数を高々2 つの素数の積となる自然数の３乗に改良できることが，上記の結果から簡単に従う．より詳しくは，p_iを素数，m，n を上と同様，素数か２つの素数の積であるような自然数とするとき，充分大きい偶数 N は，

$$N=p_1^3+p_2^3+p_3^3+p_4^3+p_5^3+p_6^3+m^3+n^3$$

の形で，充分大きい奇数は

$$N=p_1^3+p_2^3+p_3^3+p_4^3+p_5^3+(2p_6)^3+m^3+n^3$$

の形で，それぞれ表せることが証明された．これらの成果は Brüdern 氏と共同で証明し，Glasgow Math. J. 誌に発表した．

(4) 余次元１葉層を与えたときに，リーマン計量の変形に対して平均曲率関数がどのように変化するかを調べ，それから緊密葉層に関するいくつかの性質を導いた．特に，多様体が必ずしもコンパクトでない場合にも，余次元１葉層に横断的で divergence-free なベクトル場があれば極小葉層になることを押切が示し，岩手大学教育学部紀要に発表した．

(5) 加法的問題の研究においては，指定された形の和で表せない自然数の密度がしばしば問題となるが，円周法でそのような密度評価を与える際に，1940 年前後に Davenport が発表した Diminishing range method が有効な場面があることを，川田が Wooley 氏と共同で発見した．

また，その発見と関連して，２つの加法的表現について，一方が他方の部分形式になっている場合に，それらの表現に付随する例外集合の間の関係を直接的に明示する手法も開発した．例えば，5 つの 3 乗数の和で表せない自然数の密度と，6 つの 3 乗数の和で表せない自然数の密度との間の関係を直接表現することができるようになったわけである．例外集合の密度の間にこういった関係があること自体は，この分野の研究者にはかな

り以前から知られていたことであるが，それを明らかな形で表現した点にも，この成果の意義があると思われる．

具体的な結果の一例をあげれば，X 以下の自然数のうち 6 個の 3 乗数の和で表せないものの個数を E(X)とするとき,X が大きければ，E(X)は X の 3/7 乗より小さいという評価を得た．これ以前に知られていた最良の結果は，E(X)は X の 23/42 乗より小さい，というものであった．

この方法は多くの加法的問題に応用でき，上記の結果に加え， 6 個，7 個，8 個のそれぞれの個数の素数の 3 乗の和で表せない自然数の密度に対する新しい評価を与えたほか，4 乗数の Waring 問題に付随する例外集合の密度評価，および，べき乗数の和としての表現の数に対して予想されている漸近式に関わる例外集合の密度評価に対しても，これまで知られていた評価を上回る結果を得た．これらの成果は，2 編の論文に分け，Mathematika 誌と J. London Math. Soc.誌に発表した．

(6) 押切は接触構造をもつ 3 次元多様体において S. Chern と R. Hamilton によって導入された「許容計量」を拡張し，任意の正定数 k に対して「k一許容計量」を定義し，その基本的な性質を調べた．これにより，とくにリッチ曲率の値と全測地的であること，およびレーブベクトル場がキリングベクトル場となることが同値であることを示した．この成果は，岩手大学教育学部紀要に発表した．

(7) Waring 問題における表現数に対する漸近式を求める際の Heath-Brown の方法を応用し，大きい自然数を 1 つの平方数と 17 個の 5 乗数の和として表す方法の数に対する漸近式を示した．この結果は，Brüdern 氏と共同で，Monatsh. Math.誌に発表した．Heath-Brown の方法は，これまで 6 乗以上の場合にしか有効な応用のなかったものであり，それを 5 乗数を含む Waring 問題に対して応用することに成功したことが，この成果の意義である．

(8) 実数 a，b に対して，an+b の整数部分として得られる数列は，Beatty 数列と呼ばれる．その数列中の素数のうち x 以下のものの個数を π(x;a,b)とする．その a が無理数のとき， π(x;a,b)に対する漸近式は，Banks と Shparlinski が示したが，その証明方法とは全く別の着想によって，漸近式

$$\pi(x+y;a,b)-\pi(x;a,b)\sim y/\log x$$

を，y が x の 5/8 乗より大きいという条件の下で証明した．これは Banks と Shparlinski の結果の精密化であるが，その事実よりも，Beatty 数列中の素数の分布の問題を Diophantus 近似の問題ととらえて扱う，という着想の方が，この成果の重要な点であると考えている．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 １０ 件）

① Jörg Brüdern and Koichi Kawada, The localisation of primes in arithmetic progressions of irrational modulus, Colloq. Math.， 査読有，vol. 123, 2011, pp.53-61.

② Jörg Brüdern and Koichi Kawada, The asymptotic formula in Waring's problem for one square and seventeen fifth powers, Monatsh. Math.， 査読有， vol. 162, 2011, pp.385-407.

③ Gen-ichi Oshikiri, On curvatures of k-adapted metrics to contact 3-manifolds, Ann. Rep. Fac. Edu. Iwate Univ.， 査読有， vol. 70, 2011, pp. 81-87.

④ Koichi Kawada and Trevor D. Wooley, Relations between exceptional sets for additive problems, J. London Math. Soc.， 査読有，vol.82, 2010, pp.437-458.

⑤ Koichi Kawada and Trevor D. Wooley, Davenport methods and slim exceptional sets: The asymptotic formulae in Waring's problem, Mathematika, 査読有, vol.56, 2010, pp.305-321.
⑥ Jörg Brüdern, Koichi Kawada and Trevor D. Wooley, Additive representation in thin sequences, VIII: Diophantine inequalities in review, in ``Number Theory. Dreaming in Dreams, Proceedings of the fifth China-Japan Seminar", 査読有, 2010, pp.20-79.
⑦ Gen-ichi Oshikiri, Some properties on mean curvatures of codimension-one taut foliations, Ann. Rep. Fac. Edu. Iwate Univ., 査読有, vol. 69, 2010, pp. 103-109.
⑧ Jörg Brüdern and Koichi Kawada, On the Waring-Goldbach problem for cubes, Glasgow Math. J., 査読有, vol.51, 2009, pp.703-712.
⑨ Gen-ichi Oshikiri, Hamiltonian property of claw-free graphs from the viewpoint of topological combinatorics, Ann. Rep. Fac. Edu. Iwate Univ., 査読有, vol.68, 2009, pp.47-52.
⑩ Jörg Brüdern, Koichi Kawada and Trevor D. Wooley, Additive representation in thin sequences, VII: Restricted moments of the number of representations, Tsukuba J. Math., 査読有, vol.32, 2008, 383-406.

〔学会発表〕（計 6 件）

① Koichi Kawada, On exceptional sets in Waring's problem for cubes, Zeta Function Days in Seoul, 2009.8.31, 延世大学（ソウル，大韓民国）.
② Koichi Kawada, Some topics in the Waring-Goldbach problem for cubes, Additive and Analytic Activities Conference, 2009.7.1, リール大学（リール，フランス共和国）.
③ 川田浩一，篩の方法の概要と応用例，第2回ゼータ若手研究集会，2009.2.19，名古屋大学多元数理科学研究科（愛知県）.
④ Koichi Kawada, On the Waring-Goldbach problem and related topics, Pan Asian Number Theory Conference, 2009.1.10, 浦項工科大学（浦項，大韓民国）.
⑤ Koichi Kawada, Restricted moments of the number of representations in Waring's problem, The fifth China-Japan Conference on Number Theory, 2008.8.30, 近畿大学理工学部（大阪府）.
⑥ Koichi Kawada, On the exceptional sets for the Waring-Goldbach problem for cubes, Canadian Number Theory Association X Meeting, 2008.7.15, ウォータールー大学（ウォータールー，カナダ）.

６．研究組織

(1)研究代表者
川田　浩一（KAWADA KOICHI）
岩手大学・教育学部・准教授
研究者番号：７０２７１８３０

(2)研究分担者
押切　源一（OSHIKIRI GEN-ICHI）
岩手大学・教育学部・教授
研究者番号：７０１３３９３１

(3)連携研究者
なし.