

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540003

研究課題名(和文) 概均質ベクトル空間のゼータ関数

研究課題名(英文) Zeta functions of prehomogeneous vector spaces

研究代表者

雪江 明彦 (YUKIE AKIHIKO)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：20312548

研究成果の概要(和文)：本研究においては、以前完成させた結果を出版することが一つの目的だった。直近に完成した三つのプレプリントのうち二つは、今回の研究期間中に出版することができた。三つめは改訂中である。その結果を得る過程において、ジョルダン分解の概念を拡張する可能性に気がついた。それを遂行するのが、もう一つの目的であった。それはプレプリントという形では実現していないが、研究は進行していて、近い将来プレプリントになる予定である。

研究成果の概要(英文)：One of the purposes of this investigation was to publish results Obtained before. Two of the preprints finished just prior to this investigation have appeared. The third one is in the process of revision. During the course of finishing this work, I discovered the possibility of extending the notion of the Jordan decomposition and another purpose was to pursue this possibility. Even though I have not finished a preprint, it is progressing and I expect to have a preprint in the near future.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：整数論、概均質ベクトル空間、ゼータ関数、密度定理

## 1. 研究開始当初の背景

雪江はおもに概均質ベクトル空間の大域ゼータ関数と有理軌道分解の周辺で研究を行ってきた。本研究以前には、一般変数の2次形式の空間や、3変数2次形式の対の空間の大域ゼータ関数の極の主要部を決定した[6]。そこでは、幾何学的不変式論の安定性の概念による不安定点の帰納的構造を使い、アイゼンシュタイン級数の評価をともなう大掛かりな解析が必要であった。また、これ以外の場合でも、いくつかの場合に大域ゼータ

関数の極の主要部を決定した。また、概均質ベクトル空間の有理軌道に関しては、[7]を始めとしていくつかの場合に有理軌道が非常に興味深い整数論的対象をパラメータ化すること示した。それは[1]の仕事などにもつながっている。大域ゼータ関数の極の主要部がわかり、局所軌道ゼータ関数の一様評価が証明できると、有理軌道に関して「フィルター化プロセス」を適用することにより、対応する対象についての密度定理を証明することができる。例えば、3次体の密度は古

典型的な Davenport-Heilbronn の定理だが、ゼータ関数を使った証明は [2] で与えられている。また、ゼータ関数を使った証明ではないが、2 次体の類数の密度も [3] でわかっている(後にゼータ関数による証明も与えられた)。

大域ゼータ関数と局所ゼータ関数はともに重要な対象であり、これらの研究はまだまだ調べられるべきことが沢山ある。例えば、[5] では局所軌道ゼータ関数の一様評価を、明示的に局所ゼータ関数を計算することなしに行うということが初めて行われたが、それは安定化群が代数的トーラスでない場合には有効ではなかった。

そこで局所軌道ゼータ関数の一様評価を一般にも証明できるような方法が必要とされていた。[4] は 2 次形式の空間の場合に、井草ゼータ関数を明示的に計算することにより、大域ゼータ関数のある意味では明示的な公式を導いたが、そこで使われた方法であるジョルダン分解の概念が有効であった。

- [1] M. Bhargava, Higher composition laws. I. A new view on Gauss composition, and quadratic generalizations, Ann. Of Math. (2) 159 no.1, 217-250, (2004)
- [2] Datskovsky and D. J. Wright, Density of discriminants of cubic extensions, J. Reine Angew. Math. 386, 116-138, (1988)
- [3] D. Goldfeld and J. Hoffstein, Eisenstein series of  $1/2$ -integral weight and the mean value of real Dirichlet series, Invent. Math. 80, 185-208, (1985)
- [4] T. Ibukiyama and H. Saito, On zeta functions associated to symmetric matrices. I, An explicit form of zeta functions, Amer. J. Math. 117(5), 1097-1155, (1995)
- [5] A. C. Kable and A. Yukie, The mean value of the product of class numbers of paired quadratic fields. I, Tohoku J. Math. (2) 54, 513-565 (2002)
- [6] A. Yukie, Shintani zeta functions. , London Math. Soc. Lecture Note Series, 183, Cambridge University Press
- [7] D. J. Wright and A. Yukie, Prehomogeneous vector spaces and field extensions, Invent. Math. 110 no. 2, 283-314, (1992)

## 2. 研究の目的

本研究の直近の仕事で、研究代表者の雪江は、大学院生の早坂とともに、2 次形式の空間の場合の局所軌道ゼータ関数の一様評価を証明し、また、密度定理の証明に必要なオイラー因子を計算し、次元が奇数の場合と偶数の場合に密度定理を証明したプレプリントを持っていた。そこで得られた結果については

研究成果のところで述べるが、特に、偶数次元の 2 次形式の空間の場合には、安定化群が代数的トーラスでない場合に初めてフィルター化プロセスを行った。[5] ではあくまで群上で解析を行い、安定化群とある意味で transversal の関係にある集合を見つけることにより局所軌道ゼータ関数の一様評価を証明しようとする方法だった。しかし、安定化群が一般の場合にはそのような集合を見つけることが極めて難しい。そのために、群上ではなく、ベクトル空間上で  $p$  進整数環上の同値類の代表元をうまく記述することにより局所軌道ゼータ関数の一様評価を証明するのが、一般の場合に望まれることである。

偶数次元の 2 次形式の空間の場合には、古典的なジョルダン分解の概念があり、 $p$  進整数環上の同値類の代表元は完全に決定されている。この概念を使うと、局所軌道ゼータ関数を明示的に計算することは難しいが、一様評価に関しては、ほとんどの場合が簡単に評価できてしまうということがわかる。残った場合はかなり厳しい評価をすることになるが、どうしても評価できない場合は分岐や不分岐などの条件からありえない場合であることなどがわかり一様評価が証明できる。このようなことを他の概均質ベクトル空間の場合にも考察することが本研究の目的である。

2 次形式の空間の場合のジョルダン分解は、ブロック対角行列を使って整同値類の代表元が記述できるが、それらのブロックは  $p^{\{n_1\}}, p^{\{n_2\}}, \dots (n_1 < n_2 < \dots)$  で割り切れる。すると、これを  $p$  を法として考えると退化な 2 次形式となる。このように不変式論的には、この場合には整数環上では半安定点だが、 $p$  を法として考えると不安定点になるものをどう記述するかという問題になる。このような問題は [8] で示されたように、不変式論における convexity の有理性を使って記述するのが有望な一般化であると思われる。そういった不変式論的な解釈をさまざまな概均質ベクトル空間の場合に行いたい。また、2 次形式の空間の場合がそうであったように、ジョルダン分解の概念が確定したら、可能な限り密度定理を証明することも目的である。

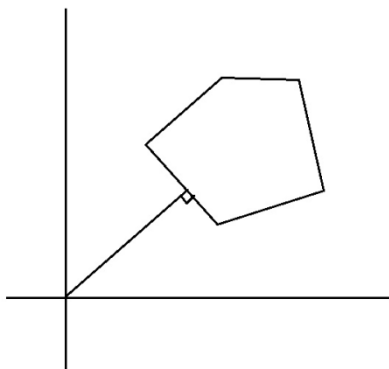
また、直近に仕上げたプレプリントを revision し、出版することも目的である。

- [8] G. Kempf, Instability in invariant theory, Ann. of Math. (2). 108, 299-316, (1978)

## 3. 研究の方法

ジョルダン分解の拡張については、不変式論にもとづく組み合わせ論的方法を使う。それは、群の極大分裂トーラスの Lie 環上で

表現の weight の有限個よりなる集合の凸包を考え、その原点に一番近い点を考えるということを行う。例えば群の階数が7で表現が40次元なら、40個の weight (7次元ベクトル)の部分集合の数は天文学的な数になり、それらすべてについて下のような点を求めなければならない。



そのために、コンピューターのプログラムを作ることが必要になる(簡単な場合にはコンピューターは必要ではない)。そのようなプログラムを作り、上のようにして得られるベクトルのうち、Weyl chamber に入るものすべてを求める。そのようなそれぞれのベクトルに対して、群の放物型部分群  $P$  と概均質ベクトル空間の  $P$  不変な部分空間  $W$  が対応し、 $P$  の Levi component  $M$  の作用を考える。これらはすべて(労力を要するが)コンピューターを使って計算可能なことである。そして  $p$  を法としては  $W$  の点になるような点全体を考え、 $M$  の作用を再び考えるというようにして帰納的な考察をする。

上のような考察で得られた情報を使って、偶数次元の2次形式の空間の場合に行ったような局所軌道ゼータ関数の一様評価を行う。

また、周辺分野の情報収集のため、研究集会を開催した。平成21年度は都合により研究集会を開催することはできなかったが、平成22年度は、10月8,9日に東北大において研究集会を開催した。講演者および講演のタイトルは以下である。

木村達雄 Classification problem of prehomogeneous vector spaces

山名俊介 Siegel-Weil formula for singular forms

森本和輝 Unitary Shalika periods and theta correspondence

岡崎武生 Theta correspondence for  $GSp(4)$  and  $GO(6)$

権寧魯 Selberg type zeta functions for the Hilbert modular group of a real quadratic field

杉山和成 Local zeta functions associated

with prehomogeneous vector spaces of parabolic type arising from special linear Lie algebras

佐藤文広 L-functions of automorphic distributions and prehomogeneous vector spaces of commutative parabolic type

H. Rubenthaler Invariant differential operators on a class of multiplicity-free spaces

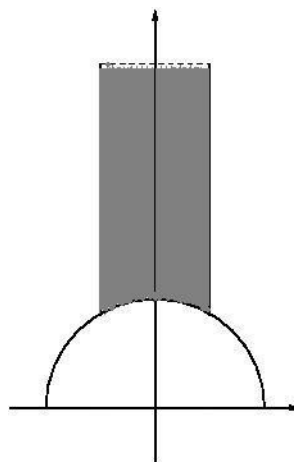
広中由美子 Spherical functions on  $U(2n)/U(n) \times U(n)$

小木曾岳義 Representations of Clifford algebras and local functional equations

この研究集会の参加者は講演者も含め約24名だった。

#### 4. 研究成果

雪江は、プレプリントだった3編の論文のうち、2編を出版した。それらにより、奇数次元の2次形式の空間の場合の密度定理の証明が確定した。この場合数えているものは、軌道の代表元の安定化群上ある意味自然に定義できる測度による stabilizer quotient の体積である。それを非正規玉河数ということにすると、例えば安定化群が  $SL(2)$  なら、この非正規玉河数は下のように、



上半平面の基本領域の体積、つまり  $\zeta(2)$  ということになる。この場合の有理軌道は2次形式  $Q$  の similitude の群  $GO(Q)$  として現れるような群の基礎体上の同型類全体よりなる。そして得られた結果は2つの代表元の対  $Q_1, Q_2$  の非正規玉河数  $V(Q_1), V(Q_2)$  の積の密度が  $X^{(n+1)/2}$  の定数倍(その定数はオイラー積によりあらわされる)となるというものである。

その後の Kable のタウバー型定理の改良 [10] により、軌道の対ではなく、軌道そのものを、非正規玉河数の重みつきで数えると、その密度が  $X^{(n+1)/2}/(\log X)^{1/2}$  のオーダーで

あることがわかった。既に出版した第1部と第2部では上で述べたような主張が書いてあるが、第3部でこのより新しい形の結果について書いた。これらの結果の Steinitz 不変量を考察した密度定理についても [9] が発表されるなどしている。

また、本研究期間中にこの結果を含む過去の業績により、日本数学会代数学賞を受賞した。第3部は改訂中である。

ジョルダン分解の拡張に関しては、いくつかの簡単な場合にはできている。例えば、 $GL(2) \times GL(2) \times GL(2)$  の標準表現の3個のテンソル積の場合にはジョルダン分解の類似ができ、それを使って局所軌道ゼータ関数の一様評価も証明できる(ただし、一様評価は別の方法で以前に証明済み)。非常に興味深い場合として、3次行列の対の空間(ただし群は  $GL(3) \times GL(3) \times GL(2)$ )がある。この場合は群の階数が5なので、難しい場合である。この場合には、上で述べたようなコンピュータープログラムを実際に作るまでであった。ただし、C言語で作ったので、正確性のために、perl あるいは Maple のような言語で作り直す必要がある。また、コンピューターによる計算ができたからといって、ただちにジョルダン分解の類似ができるわけではなく、そこから不変式論的および整数論的な考察が必要である。この場合の軌道の数は30近いので、現在実行中だが、時間がかかっている。また、プログラム自身は他の場合でも weight を変えるくらいでほとんど同じなので、他の場合にも実行中である。他にもいくつかこのようなプログラムを実行した。それは近いうちにプレプリントにする予定である。

[9] A. C. Kable, An arithmetical invariant of orbits of affine actions and its application to similarity classes of quadratic spaces, Int. J. Number Theory 6 no. 6, 1215-1253 (2010)

[10] A. C. Kable, A variation of the Ikehara-Delange Tauberian theorem and an application, Comment. Math. Univ. St. Pauli 57 no. 2, 137-146 (2008)

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

1. N. Hayasaka and A. Yukie, 査読有 On the density of unnormalized Tamagawa Numbers of orthogonal groups II., Amer. J. Math. 131 (3), 683-730 (2009)
2. N. Hayasaka and A. Yukie, 査読有 On

the density of unnormalized Tamagawa Numbers of orthogonal groups I., Publ. Res. Inst. Math. Sci., 44 (2), 545-608 (2008)

[学会発表] (計2件)

1. 雪江明彦, Prehomogeneous vector spaces and number theory, 東北復旦代数幾何合同シンポジウム, 2009年11月24日 東北大学
2. 雪江明彦, 概均質ベクトル空間と整数論, 日本数学会代数学賞受賞記念特別講演, 2009年3月28日 東京大学

[図書] (計3件)

1. 雪江明彦, 日本評論社「代数学3 代数学のひろがり」, 2011, 432ページ
2. 雪江明彦, 日本評論社「代数学1 群論入門」, 2010, 158ページ
3. 雪江明彦, 日本評論社「代数学2 環と体とガロア理論」, 2010, 300ページ

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

雪江 明彦 (YUKIE AKIHIKO)  
東北大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 20312548