

機関番号：32689

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540007

研究課題名 (和文) 多変数保型形式と多変数超幾何関数に内在する数論的關係

研究課題名 (英文) Arithmetic relations between modular forms and hypergeometric functions in several variables

研究代表者

志賀 弘典 (SIGA HIRONORI)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：90009605

研究成果の概要 (和文)：2 変数超幾何微分方程式のシュワルツ写像から 2 次元複素超球上の保型形式が得られ、その応用として、

- 1) 超幾何関数のシュワルツ写像に対する特殊値の、代数性判定定理
- 2) 2 変数のガウス算術幾何平均定理
- 3) 2 変数のヤコビのテータ回帰公式
- 4) 判別式 6 の志村曲線の明示的表示の諸結果が得られた。

研究成果の概要 (英文)：The Schwarz map for a hypergeometric differential equation of 2 variables induces modular forms on the 2-dimensional complex hyperball. By using these modular forms we obtained

- 1) Algebraicity criterion for special values of the Schwarz map for a hypergeometric differential equation,
- 2) Extension in 2 variables of the Gauss arithmetic geometric mean theorem,
- 3) Extension in 2 variables of the Jacobi theta recursive theorem,
- 4) Explicit expression of the Shimura curve with discriminant 6.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：複素多様体、保型形式、超幾何微分方程式

1. 研究開始当初の背景

研究課題のテーマには以下のような幾つかの異なった接近が考えられる。

- (1) Gauss による算術幾何関数の理論の多変数的、保型関数的発展を目指す方向。

- (2) 代数多様体の積分周期として現れる関数について数論的観点を加味して研究する方向。

- (3) さまざまな超幾何関数の特殊値の代数性

を、Abel 多様体の虚数乗法論と結びつけて論じる方向。

いずれも、研究代表者が長年追求して来た問題であり、その経緯を簡単に述べる。

[全体構想]

多変数複素関数論は 1940 年代の Siegel による多変数保型関数論、1950 年代の岡潔の研究を骨格とする一般関数論の展開の後停滞した。真の意味の多変数特殊関数論がなかったからである。

研究代表者の一貫した研究テーマは、数論的存在価値の明確な多変数特殊関数論の展開である。

1971 年、1981 年発表の 2 論文は楕円曲線から発する古典的保型関数論の発展形を、K3 曲面から構築する意図で書かれた最初のもので、その後 Yau, Hosono, Borchards, Yoshikawa らが関わって盛んになっていった「K3 モジュラー関数論ないし IV 型領域上の保型関数論」の嚆矢であった。この研究は 1988 年の業績で保型形式の具体的な Fourier 展開を与えて精密化されたが、Borchards の研究とは一線を画す独自性を有するものである。

(い) 一方 K3 曲面の族に対する周期写像は多変数の超幾何微分方程式ないし Fuchs 型微分方程式を満たし、そこから現れる保型関数は Schwarz 写像の逆写像としてもとらえられる。この観点から吉田正章、松本圭司、日本の超幾何関数研究者が 1980 年代から盛んな研究を展開し現在に至っている。この方向に関しても研究代表者はオリジナルな計画を有している。

(う) さらに、古典的な Gauss の超幾何関数の特殊値の代数性の研究は Wolfart(Frankfurt), Wustkolz(Zurich), Beukers(Utrecht) らの 1980 年代以来の Abel 多様体の虚数乗法論の観点からの深い研究の歴史がある。この方向では研究代表者による 1988 年発表の古典理論の多変数化における顕著な寄与がある。

2. 研究の目的

以上の状況を踏まえて、以下に述べる新しい展開

を計画した。

(i) 多変数算術幾何平均と保型形式論との本質的

関係の解明。1799 年 Gauss が得た算術幾何関数に対する三位一体定理（算術幾何関数の逆数=楕円曲線の周期=Gauss 超幾何関数）

と Gauss 自身が 1818 年に与えたその保型形式的解釈（Jacobi のテータ零値の 2 倍公式が算術幾何過程に一致している）とは、その異常な美しさにも関わらず 200 年余り多変数的な発展が皆無であり、1 変数的な類似物もほとんど発見されていなかった。2007 年の業績は多変数算術幾何関数に関する三位一体定理とその保型形式的解釈の一般理論へ向かう最初の一撃である。ここでは、業績 88 年の精密な結果が大きな役割を果たした。ここに隠されている一般原理をより広汎な姿勢で明らかにしてゆく。また、07 年論文で採用された 3 項算術幾何平均システムは超高速の近似法であり、近似計算への応用も興味深い。

(ii) K3 曲面の周期写像から生じる超幾何微分方

程式および保型形式の構成。超幾何微分方程式の Schwarz 写像から導かれる保型関数はさまざま構成されているが、数論的応用に乏しい。また、Hilbert modular 関数に関する研究はさまざまあるが、これも具体的な数論的結果に乏しい。この姿勢に鑑みて、Hilbert modular 関数を K3 modular 関数の観点から攻撃して、この分野に新展開をもたらしたい。実際には Batyrev が展開した reflexive polytope を Newton Polygon と捉えることによっておびたしい K3 modular 関数もたらされるが、その中に Hilbert modular 関数を導くものが、予備研究ですで見つかっている。

種々の超幾何関数における特殊値の代数性の研究。

古典的 Gauss 超幾何関数の特殊値の代数性は 04 年の論文で論じられた。より広汎な超幾何関数、特に Appell 型および Lauricella 型の場合の

議論はこれまでなされてこなかった。これは 04 年論文で得られた結果を基礎として考察可能であり、確実な収穫が見込まれる。

3. 研究の方法

要旨] 研究目標に挙げた 3 つの方向で研究を展開する。(i) は、古典的な問題を扱いながら、従来企てられたことのない独創性を持つ研究であり、内外の研究者から注目を集めている。3 つの目標の中でも最も力を入れて研究する予定である。(ii)(iii) は研究代表者がこれまで扱ってきた主題をさらに展開させようというもので、研究分担者、連携研究者の支援を仰いで進展させる。

[平成 20 年度における研究計画・方法]

研究目標に掲げた (i)(ii) (iii) の研究を遂行する。

(i) においては、すでに得られている [1] の結果は 1991 年 Borwein 兄弟が発見した 1 変数算術幾何平均の類似物 (cubic AGM と呼ばれている) の 2 変数化であった。当面、古典的な Gauss の算術幾何平均そのものの多変数化、およびそれに対応する多変数保型形式の isogeny formula を確定したい。Terada (1983 年) および Deligne-Mostow (1986 年) によって得られている 2 次元超球上の保型函数の一覧表の中に候補となる保型形式は隠されているものと考えられる。実際に、そこから新しい算術幾何平均を取り出すのは容易ではないが、現象としてはここに捉えられていると考える。Gauss の先にある一般理論がどのようなものかは、現時点では全く予想がつかないが、必ず新しい解析学と数論との往還の道筋をあたえるものと信じる。

吉田正章 (九大) および佐々木武 (神戸大) 両氏による、2 変数階数 4 の微分方程式の研究 (1988 年 Math. Annalen) によって $2^{1/2}$ による実乗法をもつ Hilbert modular 函数を導く微分方程式が例示されている。一方、 $2^{1/2}, 5^{1/2}$ の実乗法をもつ Hilbert modular 函数はさまざまな研究がなされているが、modular form は具体的な形では得られていない。Batyrev 流の 3 次元 reflexive polytope の定める Fano 多様体の超平面切断として特殊な K3 曲面の 2 parameter 族が得られるが、この族に対する周期写像の Schwarz 逆写像から $2^{1/2}$ に対する Hilbert modular 函数が現れることが、研究代表者の研究室の大学院生石毛利昌氏によって解明された。この周期写像と吉田氏らの微分方程式との関係が明らかになれば、これまで明確な応用を持たなかった Hilbert modular form の理論に新しい展開がもたらされると期待される

iii) J. Wolfart (Frankfurt 大) との 2 つの共著論文において行った Gauss 超幾何微分方程式に対する Schwarz 写像の特殊値の代数性の研究を拡張する。ここにおいて用いられた手法は 1995 年の Shiga-Wolfart 共著論文を基礎としている。主要な論点は以下のようなものである。微分方程式の解を積分表示すると、超幾何型代数曲線上の第 2 種微分の周期が現れ、この代数曲線は微分方程式の変数に応じて複素構造が変化する。考える変数は代数的な数とすると、Schwarz 写像の値が代数的となるのは、この代数曲線の Jacobi 多様体の Prym variety が虚数乗法を持つ場合に限られるが、それは十分条件ではない。代数値を得るためには、第 2 種微分の空間における虚数乗法体の作用、さらには固有空間への分解様式を詳しく調べる必要がある。

このような研究を、Gauss 超幾何微分方程式を拡張した種々の超幾何微分方程式にまで展開することは、Schwarz 写像の数論全般に於いて基本的な重要性を持つ。

[H 21 年度以降は、プロジェクトの進行状況に応じて研究を進めることとした].

4. 研究成果

上記の目的と方法に従って下記の成果を得た。概要は上記参照。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件) いずれも査読付き。

[1] Petkova, M. and Shiga, H.: A new interpretation of the Shimura curve with discriminant 6 in terms of Picard modular forms, Arch. der Math., 96(2011), 335--348.

[2] Shiga, H.: A Jacobi type formula for a family of hyperelliptic curves of genus 3 with automorphism of order 4, Kyushu J. Math., 65(2011), 169--177.

[3] Matsumoto, K and Shiga, H.: A variant of Jacobi type formula for Picard curves, J. Math. Soc. Japan, 62(2010), 305--319.

[4] Shiga, H., Suzuki, Y. and Wolfart, J.: Arithmetic properties of Schwarz maps, Kyushu J. Math., 63(2009), 167--190.

[5] Koike, K. and Shiga, H.: Extended Gauss AGM and corresponding Picard modular forms. J. Number Theory, 128(2008), 2029--2126.

[学会発表] (計 7 件)

(a) 2010年 5月 26日、Juergen Wolfart 教授還暦記念研究集会 (Castro Urdiales, Spain)、

"A new interpretation of a Shimura curve" (招待講演)。

(b) 2010年 3月 18日、研究集会「アクセサリパラメーターとその周辺」(熊本大学)、

"A new interpretation of a Shimura curve"

(c) 2010年 1月 研究集会「保型形式とその周辺」(東京大学) "A Jacobi type formula in 2 variables

via Picard modular forms"

(d) 2009年 3月、Daniel Bertrand 教授還暦記念研究集会 (パリ大学)、"A Jacobi type formula in 2 variables via Picard modular forms" (招待講演)

(e) 2009年 7月 12日、シンポジウム "数論週間" (フランス、サンテティエンヌ大学) で "A Jacobi type formula in 2 variables and its application" (一般講演)

(f) 2008年 10月、シンポジウム "超幾何関数をめぐる幾何と数論" (ドイツ、オーバーヴォルフアッハ数学研究所) で "A variant of Jacobi type formula" (招待講演)

(g) 2008年 4月 - 6月、ヨーロッパ大学院連合 "Erasmus Mundus" で集中講義 "On elliptic modular forms"

(於: パドヴァ大学)

[図書] (計 3 件)

[1] 志賀弘典, 「15週で学ぶ複素関数論」、数学書房 (増補改訂版 2008)

[2] 志賀弘典, 「数学の視界」、数学書房 (2008)

[3] 志賀弘典, 「数学語圏」、数学書房 (2009)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

志賀 弘典 (SIGA HIRONORI)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号: 90009605