

## 自己評価報告書

平成23年 4月20日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2011

課題番号：20540009

研究課題名(和文) 量子群の幾何学的研究およびその多元環の表現論への応用

研究課題名(英文) Geometric study of quantum groups and its application to representation theory of algebras

## 研究代表者

斉藤 義久 (YOSHIHISA SAITO)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：20294522

研究分野：代数学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：量子群, 結晶基底

## 1. 研究計画の概要

本研究の研究目的は量子群を幾何学的な立場から研究することにあるが、その際に中心的な役割を果たすのが結晶基底の理論である。結晶基底を仲立ちにして、Dynki 図形に付随する有向グラフ(籐)から定まる代数多様体(籐多様体)の幾何学と量子群の理論・組み合わせ論を結びつけ、さらにその結果を多元環の表現論に応用し、最終的には全てを包括する統一的理論体系の構築を目標とする。

Ringel-Lusztig による量子群と籐の表現論の関係の発見以来、多くの研究が「籐の表現論で知られていた結果を量子群の表現論に応用する」という方向で行われてきた。近年、逆向き、即ち「量子群の表現論を籐の表現論に応用する」方向の研究も行われつつあるが、おもに標準基底の理論を用いるもので、結晶基底の理論が用いられている例は殆どない。結晶基底は量子群の  $q \rightarrow 0$  における基底であり、標準基底に比べると情報が落ちているとの欠点を持つが、同時に、情報が欠落しているために、組み合わせ論的な記述が可能との利点も持つ。本研究では、結晶基底を中心に据えることで既存の研究の意味を問い直し、結晶基底の長所である組み合わせ論的側面を最大限生かし、理論全体を再構築することを目的としている。その意味で本研究の着眼点はこれまでに無かった斬新なものである。

## 2. 研究の進捗状況

結晶基底の具体的な計算では、結晶基底をどのような組み合わせ論的对象で実現するかが鍵となる。現在数種類の実現方法が知られているが、著者は籐の幾何学と相性が良いという理由から、これまで Young 図形による実現

を用いてきた。しかしこの実現には短所もあり、ある種の計算には向かない。一方、最近アフィン・グラスマン多様体の幾何学に起源を持つ Mirkovic-Vilonen 凸多面体によって結晶基底を実現する方法が開発された。この実現は Young 図形による実現と相補的な関係にあり、互いの欠点を補い合うことができる。両者の関係を具体的に明らかにすることが本研究の第一歩と考え、まずこの点から着手した。その結果、当初の予定よりはるかに精密な結果が得られ、その一部については口頭発表ないし研究論文の形ですでに公表を行っている。未発表の部分に関しては現在論文を執筆中で、今年度内に学術雑誌に投稿の予定である。

また、応用の部分に関しても、(a) 1 のベキ根の場合の量子群の表現論との関係、(b) 楕円ルート系、Hecke 代数との関係、(c) 直交多項式系との関係等、さまざまな分野との関係が明らかになった。

## 3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

(理由) 申請時に考えていた研究内容は以下のものであった。(i)結晶基底の幾何学的理論の深化および組合せ論的構造の抽出、(ii)標準基底と準標準基底の関係の解明、(iii)前射影代数の表現路論と結晶基底の理論との関係の構築、(iv)楕円ルート系との関係の解明。

すでに述べたように(i)に関しては当初目的をほぼ達成出来たと考えている。(iv)に関しても、ある程度まとまった成果が得られている。これら2つのテーマに関しては、口頭発表もしくは研究論文の形で、すでにその内容を公表し始めているところである。

(iii)については、まだ発表が出来るレベルではないものの、部分的に成果が得られ始めて来ている。今年度中には公表出来る形に仕上げたいと考えている。

(ii)については、現状ではあまり手がつけられていない。これは(i)を達成するために多くの労力を割いてしまったことに起因する。研究の順序から考えれば致し方なかった面はあるものの、この点は反省すべきであろう。まだ時間は残されているので、何とか成果を挙げられるよう努力していきたい。

以上の点を総合的に判断し、現時点までで当初計画の7割程度の達成度だろうと判断している。もう一年研究期間が残されていることを考えれば、おおむね順調に進展していると判断して良いだろう。特に上記(i)の部分については、計画当初に予想していたよりはるかに精密な結果が得られた。この点において、最低限の目的は達成出来たと考えている。

#### 4. 今後の研究の推進方策

(1)当初計画と比べ、遅れ気味である(ii)に力点を置いていく。代数群の表現論の代数解析的研究で開発されたHodge加群に方法が有効であろうと考えている。

(2)昨年末、(i)および(iii)に関連して、筆者とは全く別の立場から結晶基底と前射影代数の表現論の関係を論じた論文が発表された(Baumann-Kamnitzer)。彼らの成果と筆者の研究の関係を詳しく解析することによって、(i),(iii)に関連したより精密な成果が得られると考えている。

#### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

① Saburo KAKEI, Michitomo NISHIZAWA, Yoshihisa SAITO, Yoshihiro TAKEYAMA, The rational qKZ equation and shifted non-symmetric Jack polynomials, SGMA 5, (2009), Paper 10, 12pp, 査読有.

② Yoshihisa SAITO and Midori SHIOTA, On Hecke algebras associated with elliptic root systems and the double affine Hecke algebras, Publ. RIMS.,45 (2009), 845-905, 査読有

③ Yoshihisa SAITO and Hiroki KONDO Indecomposable decomposition of tensor products of modules over the restricted quantum enveloping algebra associated to  $\mathfrak{sl}_2$ , Journal of Algebra, 330, (2011), 103-129, 査読有.

[学会発表] (計4件)

① Yoshihisa SAITO Hecke 代数の多項式表現について, 招待講演, 第53回代数学シンポジウム 盛岡駅前アリーナ, 2008年8月.

② Yoshihisa SAITO, On tensor category arising from representation theory of the restricted quantum universal enveloping algebra associated to  $\mathfrak{sl}_2$ , Invited talk, International workshop on combinatorial and geometric representation theory, Seoul National University (Seoul, Korea), September, 2009.

③ Yoshihisa SAITO On tensor category arising from representation theory of the restricted quantum universal enveloping algebra associated to  $\mathfrak{sl}_2$ , Invited talk, Interplay between representation theory and geometry, Tsinghua University (Beijing, China), May, 2010.

④ Yoshihisa SAITO Mirkovic-Vilonen polytopes and quiver construction of crystal basis in type  $A_n$ , Invited talk, Representation theory of Algebraic Groups and Quantum Groups '10, Nagoya University (Nagoya, Japan), August, 2010.

[図書] (計1件)

① Atsushi MATSUO, Tetsuji MIWA, Toshiki NAKASHIMA and Yoshihisa SAITO, Algebraic analysis and around (編集), Advanced studies in Pure Mathematics, 54, Math. Soc. Japan, 2009.