

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年6月11日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2011

課題番号：20540009

研究課題名（和文）量子群の幾何学的研究およびその多元環の表現論への応用

研究課題名（英文）Geometric study of quantum groups and its application to representation theory of algebras

研究代表者

斉藤 義久 (SAITO YOSHIHISA)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：20294522

研究成果の概要（和文）：2000年ごろ、Mirkovic と Vilonen はアフィングラスマン多様体の中に Mirkovic-Vilonen (以下 MV と略記) cycle と呼ばれる代数的サイクルを定義した。定義から MV cycle は実極大トーラスの作用を持つが、そのモーメント写像による像は、実 Cartan 部分代数の中の凸多面体を定める。これを MV 凸多面体と呼ぶ。その後、Kamnitzer は MV 凸多面体全体のなす集合上に結晶構造を定義し、それが有限型量子包絡環のベキ零部分の結晶基底と結晶として同型であることを証明した。さらに MV 多面体は、Berenstein-Zelevinsky (以下 BZ と略記) データと呼ばれる非負整数の集合と同値な関係にあることが知られている。すなわち、BZ データによる有限型量子包絡環のベキ零部分の結晶基底の新しい実現が得られたことになる。

我々は、この結果をアフィンの A 型の場合に拡張した。より正確には、まずアフィン BZ データなる概念を定式化し、アフィン BZ データの全体が、アフィン A 型の量子包絡環のベキ零部分の結晶基底と同型な結晶構造を持つことを証明した。すなわち、我々はアフィン BZ データによる、アフィン A 型の量子包絡環のベキ零部分の結晶基底の新しい実現を得たことになる。我々の主結果は組合せ論的な用語で記述されているが、その証明では、Kashiwara と研究代表者による結晶基底の幾何学的構成が、本質的な役割を果たしている。

研究成果の概要（英文）：Around 2000, Mirkovic and Vilonen defined a new class of algebraic cycles in affine Grassmanians, called Mirkovic-Vilonen (MV for short) cycles. By the definition, these cycles has an action of a real maximal Torus, and their moment map image are polytopes in a real Cartan subalgebra, called MV polytopes. After their work, Kamnitzer defined a crystal structure on the set of all MV polytopes, and proved that it is isomorphic to the crystal basis of the negative half of quantum universal enveloping algebras of finite type. Moreover, it is known that the followings are equivalent: to give a MV polytope, and to give a collection of nonnegative integer, called Berenstein-Zelevinsky (BZ for short) data. In other words, he introduced a new realization of the crystal basis of the negative half of quantum universal enveloping algebras of finite type, by using BZ data.

In this study, we generalize his result to the case of affine type A. More precisely, we define a notion of affine BZ data, and prove that the set of all affine BZ data has a crystal structure which are isomorphic to the negative half of quantum universal enveloping algebras of affine type A. Namely, we get a new realization of the crystal basis of the negative half of quantum universal enveloping algebras of affine type A, by using affine BZ data. Our main results are stated by combinatorial language, but in our proof, a geometric construction of crystal basis due to Kashiwara and the author plays a crucial role.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：代数学

科研費の分野・細目：数学・代数学

キーワード：量子群，結晶基底

1. 研究開始当初の背景

可解格子模型の研究に端を発した量子群の理論は、現在では可解格子模型に留まらず、数学全体に広範な応用を持つに至った。その中でこれまでの研究代表者の研究と特に関係が深いのは次の2つである。

- (1) 籐の幾何学と量子群との関係，および準基底の理論。
- (2) 結晶基底の理論と，それに関連する組み合わせ論。

前者は Lusztig に始まると言ってよい。Ringel は籐の表現の同型類が生成する線空間上に接合積によって積構造を入れた代数(Hall 代数)が，量子群のベキ零部分と同型になることを示した。続いて Lusztig は、籐に付随する代数多様体を用いて，この結果の幾何学的解釈を与えた。このとき量子群は前述の代数多様体上の層の複体のなす導来圏の Grothendieck 群として実現される。さらに Lusztig は，ある種の偏屈層の全体が基底をなすことを示し，これを標準基底と呼んだ。これらは，1980 年前後に代数群の表現論において革命的な発展をもたらした方法論を，量子群の研究に適用したものである。

量子群のパラメータ $q \rightarrow 0$ の極限をとることによって得られる結晶基底は，柏原により導入された。結晶基底の理論によって，量子群の表現論における諸問題を組み合わせ論的な問題に還元することができ，現在では結晶基底の理論は量子群の研究において欠かせない道具の1つになっている。また柏原は $q \rightarrow 0$ における基底である結晶基底から，量子群の真の基底（大域結晶基底）を得る方法を開発した。その後 Grojnowski-Lusztig により大域結晶基底と標準基底は一致することが証明されている。

標準基底(=大域結晶基底)がその導入時から幾何学と深く結びついていたのに対し，結晶基底は純代数的な方法で定義される。他方，

研究代表者と柏原の共同研究により，結晶基底の研究に対しても幾何学的な手法が用いられるようになった。研究代表者らは，まず籐に付随する代数多様体のラグランジアン部分多様体の既約成分全体の集合に結晶構造を定義し，さらに結晶として量子群のベキ零部分の結晶基底と同型になることを証明した。続いて研究代表者は中島による籐多様体を用いて量子群の既約表現の結晶基底の幾何学的実現を与えた。このように「結晶基底の幾何学的理論」は現在もその応用範囲を広げつつある。

Lusztig による発見以後，籐の表現論自身にも幾何学的な手法が導入されつつある。中でも応募者が注目しているのは、Geiss-Leclerc-Schroer (以下 GLS と略記)による研究である。結晶基底の幾何学的構成に現れる代数多様体は、ある特別な籐の表現全体のなす代数多様体と同一視できる。この籐の表現を多元環の言葉に翻訳したものが前射影代数である。GLS は，前述の代数多様体の既約成分の構造を通じて，前射影代数の表現論と準標準基底の積構造との間に密接な関係があることが示した。ここで準標準基底とは、前述の代数多様体から幾何学的な操作により定まる普遍包絡環の基底であるが，量子群の標準基底と比べ理論的に未整備で、そのため GLS の発見も現象論的なレベルに留まっている。同時に GLS は，特別な場合(A_5型と D_4型)に，前射影代数の表現の圏と楕円ルート系との密接な関係が指摘された。楕円ルート系は単純楕円型特異点の研究から齋藤恭司によって導入されたルート系の拡張概念であるが，現状ではこの関係は十分に理解されたとは言い難く，その解明は今後の研究課題と言えるだろう。

2. 研究の目的

本研究課題の研究目的は，量子群を幾何学

的な立場から研究することにある。特に、研究代表者のこれまでの研究手法で中心的な役割を果たしてきた結晶基底の理論を用いる事で、これを実現する。すなわち、結晶基底を仲立ちにして、Dynkin 図形に付随する有向グラフ(籐)から定まる代数多様体(籐多様体)の幾何学と量子群の理論・組み合わせ論を結びつけ、さらにその結果を多元環の表現論に応用し、最終的には全てを包括する統一理論体系の構築を目標とする。

3. 研究の方法

本研究の特色は次の2点に集約される。

(1) 結晶基底の理論を多元環の表現論、特に籐の表現論に応用する点。

(2) 結晶基底を中心に据え、理論体系の再構築を目標にしている点。

Ringel-Lusztig による量子群と籐の表現論の関係の発見以来、多くの研究が「籐の表現論で知られていた結果を量子群の表現論に応用する」という方向で行われてきた。近年 GLS 等、逆向き。即ち「量子群の表現論を籐の表現論に応用する」方向の研究も行われつつあるが、おもに標準基底の理論を用いるもので、結晶基底の理論が用いられている例は殆どない。結晶基底は量子群の $q \rightarrow 0$ における基底であり、標準基底に比べると情報が落ちていくとの欠点を持つが、同時に、情報が欠落しているために、組み合わせ論的な記述が可能との利点も持つ。本研究では、結晶基底を中心に据えることでこれまでの研究の意味を問い直し、結晶基底の長所である組み合わせ論的側面を最大限生かして、理論全体を再構築することを目的としている。その意味で本研究の着眼点はこれまでに無かった斬新なものである。

4. 研究成果

(1) 結晶基底の幾何学的理論と、それに付随する組み合わせ論(雑誌論文の①, ②, ③, 学会発表の①, ②, ③, ④, ⑤, ⑦): まず, 有限の A 型の場合に, アフィン・グラスマン多様体の幾何学に起源を持つ Mirkovic-Vilonen 凸多面体による結晶基底の実現と, Young 図形による結晶基底の実現, および籐多様体の既約成分による結晶基底の幾何学的実現との関係を調べ, 三者を結ぶ明示的変換公式を得た。続いて, この成果を組合せ論的なレベルでアフィンの A 型の場合に拡張し, 結晶基底の新しい実現法(アフィン型 Berenstein-Zelevinsky データ(以下アフィン BZ データと略記)による実現)を確立した。さらに, 構成したアフィン型 BZ データの全体が, 結晶として連結であることを証明した。特に, 最後の連結性に関する部分は, 当初の計画案では予想していなかったことであり, その意味でこの成果は非常に大きい

ものと考えている。

(2) Hecke代数への応用:

(a) 楕円ルート系に付随するHecke代数の構成(雑誌論文の⑥, ⑦): 齋藤恭司によって導入された楕円ルート系に付随するHecke代数を構成した。また既知の代数(ダブル・アフィンHecke代数)との精密な比較を行い, 両者の関係を明らかにした。

(b) 数理物理学への応用(雑誌論文の⑧, 学会発表の⑩): 可積分系の研究に現れる差分方程式(有理qKZ方程式)の多項式解をHecke代数の表現論を用いて構成した。これは, 当初計画において, 計画が予定通りに進まなかった場合の対策として考えていたテーマであったが, 研究代表者が研究分担者として参加した「古典可積分系と量子可積分系の接点の探求」(基盤研究(C), 研究代表者: 笈三郎・立教大学理学部・教授)の研究の中で急速に議論が進んだ。

(3) 多元環の表現論との関係(雑誌論文の④, 学会発表の⑥, ⑧, ⑨): q が1の冪根の場合の量子群の表現のなす圏のテンソル圏の構造について調べた。この場合, 対応する量子群は有限次元代数であり, 有限次元多元環の表現論における既知の結果を用いて, 直既約表現同士のテンソル積の直既約分解を完全に決定した。この結果は対数的共形場理論に応用があることが知られており, 当該分野の今後の研究において, 基本となることが期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

① Daisuke Sagaki, Yoshihisa Saito, Satoshi Naito, Toward Berenstein-Zelevinsky data in affine type A, II: Explicit description, Contemp. Math. 565, 2012, pp. 185-216, 査読有。

② Daisuke Sagaki, Yoshihisa Saito, Satoshi Naito, Toward Berenstein-Zelevinsky data in affine type A, I: Constriction of affine analogs, Contemp. Math. 565, 2012, pp. 143-184, 査読有。

③ Yoshihisa Saito, Mirkovic-Vilonen polytopes and a quiver construction of crystal basis in type A, Int. Math. Res. Notices, 2012, 掲載予定, 査読有。

④ Hiroki Kondo, Yoshihisa Saito, Indecomposable decomposition of tensor products of modules over the restricted quantum universal enveloping algebras

associated to sl_2 , J. Alg., 330, 2011, pp. 103-129, 査読有.

⑤ Yoshihisa Saito, Midori Shiota, Double affine Hecke algebras and elliptic Hecke algebras, Progress in Math., 284, 2010, pp. 297-312, 査読有

⑥ Saburo Kakei, Michitomo Nishizawa, Yoshihisa Saito, Yoshihiro Takeyama, The rational qKZ equation and shifted non-symmetric Jack polynomials, SIGMA, 5, 2009, Paper 010, 12 pp., 査読有.

⑦ Yoshihisa Saito, Midori Shiota, On Hecke algebras associated with elliptic root systems and the double affine Hecke algebras, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 45, 2009, pp.845-905, 査読有.

〔学会発表〕(計10件)

① Yoshihisa Saito, On Berenstein Zelevinsky data in affine type A, Symmetries, Integrable systems and Representations, Universite 1, Lyon, France, December, 2011.

② 齊藤 義久, 前射影多元環と量子群の結晶基底, 第44回環論および表現論シンポジウム, 岡山大学理学部, 2011年9月

③ Yoshihisa Saito, On Berenstein Zelevinsky data in affine type A, Conformal field theories and tensor categories, Beijing International center for Mathematical Research, Beijing, China, June, 2011.

④ 齊藤 義久, Berenstein-Zelevonsky data and the crystal basis of $U_q \hat{\mathfrak{sl}}_{n-1}$, 組合せ論的表現論とその応用, 京都大学数理解析研究所, 2010年10月.

⑤ Yoshihisa Saito, Mirkovic-Vilonen polytopes and a quiver construction of crystal basis in type A, Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups '10, Nagoya University, August, 2010.

⑥ Yoshihisa Saito, On tensor category arising from representation theory of the restricted quantum universal enveloping algebra associated to sl_2 , Interplay between representation theory and geometry, Tsinghua University, Beijing, China, May, 2010.

⑦ 齊藤 義久, Crystals, MV polytopes and 'tropical flag varieties', トロピカル幾何と超離散系の新展開, 京都大学大学院工学研究科, 2010年3月.

⑧ Yoshihisa Saito, On tensor category arising from representation theory of the restricted quantum universal enveloping algebra associated to sl_2 , International

workshop on combinatorial and geometric approach to representation theory, Seoul National University, Seoul, Korea, September, 2009.

⑨ 齊藤 義久, Small quantum group $U_q(sl_2)$ の表現のテンソル積の直既約分解について, 日本数学会 2009年度年会, 東京大学, 2009年3月.

⑩ 齊藤 義久, Hecke 代数の多項式表現について, 第53回代数学シンポジウム, 盛岡駅前アイーナ, 2008年8月.

〔図書〕(計1件)

① Tetsuji Miwa, Ashishi Matsuo, Toshiki Nakashima, Yoshihisa Saito (ed.), Algebraic Analysis and Around, Adv. Std. Pure Math. 54, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2009.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

齊藤 義久 (SAITO YOSHIHISA)
東京大学大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号: 20264522

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

伊山 修 (IYAMA OSAMU)
名古屋大学大学院多元数理研究科・教授
研究者番号: 70347532
齋藤 恭司 (SAITO KYOJI)
東京大学数物連携宇宙機構・主任研究員
研究者番号: 20012445
谷崎 俊之 (TANISAKI TOSHIYUKI)
大阪市立大学理学研究科・教授
研究者番号: 70142916
内藤 聡 (NAITO SATOSHI)
東京工業大学大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 60252160