

機関番号：12601

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20540010

研究課題名（和文） 数論幾何的手法による周期積分の研究

研究課題名（英文） Arithmetic geometric approach for period integrals

研究代表者

寺杉友秀（Tomohide Terasoma）

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：50192654

研究成果の概要（和文）：代数多様体の周期積分に関して、代数対応、代数的サイクル、保型関数などの特殊関数の観点からの研究をおこなった。さらにそこに使われる、バー構成法の手法を応用し、正標数の多様体の p -基本群や、ドリーニュ微分次数環を用いたホッジ実現に関する基礎付けをおこない、さらに楕円混合モチーフに関連して、ベイリンソン予想の一部を解決した。また保型関数と関連して $K3$ 曲面に関するものなどの、新しいタイプのトマエ型公式を確立した。

研究成果の概要（英文）：We study period integrals of algebraic varieties from the view point of algebraic correspondence, algebraic cycles and special functions such as automorphic functions. By applying the method of bar construction to algebraic varieties over positive characteristic base field, we describe their p -fundamental group, and establish a basic tools for Hodge realization functors using Deligne differential graded algebras. We also prove some part of Beilinson conjectures concerning mixed elliptic motives. Concerning automorphic functions, we establish several new Thomae type theorems related to $K3$ surfaces, etc.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数論的代数幾何

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：周期積分、モチーフ、代数的サイクル、ホッジ構造

1. 研究開始当初の背景

代数多様体の周期積分をコホモロジー理論を用いた、ホッジ理論の観点から研究することが従来からなされていた。これらは、トレリの定理に代表されるように、代数多様体の細かい不変量を与える。これは、リーマンらに始まる代数曲線の周期やテータ関数など

の特殊関数とも関係が深く、小平、ホッジにより一般化され、グロタンディークのモチーフの思想へとつながっていった。モチーフ理論とホッジ構造の関連の観点から、周期積分を研究することの重要性がますます注目されるようになってきた。この考え方をを用いることにより、周期積分などに関して多くの応用がえられる。その例と

してアルコック・カールソン・トレドの定義した三次曲面のモジュライ空間をドゥリーニュ・モストウの曲線のモジュライの問題へ帰着するなどの成果が得られており、それを逆周期問題に応用されていた。

また、ブロック、クリズに始まりボエボツキー、レビン、花村などにより整備された、純粹モチーフを拡張した混合モチーフの理論も飛躍的進歩をとげつつある時期であり、混合モチーフの計算が代数的高次K群の計算に帰着されることとなり、多くの結果をうみだした。抽象論ともいえる混合モチーフの理論が実際に多重ゼータ値の生成する有理数体上の次元に関する評価が研究代表者によりえられていた。

これらの理論の発展の具合から、代数体で周期写像と高次単数基準写像の関連に関する研究を一步すすめることが出来る時期にさしかかってきた。

2. 研究の目的

(1) 対数関数の多重化である多重対数関数や多重ゼータ値の様々な関係式を幾何的にとらえること。冪零接続に対して基点でのファイバーをえられるファイバー関手の自己自然同型全体のなす群に空間の構造がはいると仮想的に考える。このように考えたときチェンの理論を淡中圏の理論から統一的に見ることが可能である。ホッジ理論やドゥリーニュ理論に対してこれらの理論を適用するためにチェンの理論を使いやすい形しておく必要がある。これに対しては枠組みが、できつつあったので、それらを多重対数関数に応用して、ブロック・ウィグナー型の高次多重対数関数などの研究をすることを目標にしていた。

(2) テータ関数と代数的対応を用いた周期積分を研究すること。また、先にあげた一般論の応用として、これまでに詳しく研究されていた特殊関数とその関数等式、特殊値に関する等式の幾何学的な意味付けを行う。ドゥリーニュ・モストウ・寺田の一意化される曲線のモジュライの分類定理を主眼とした周期積分の研究を行ってきて、これまで得られなかった高次の超球の保形関数をK3曲面などの周期写像に応用することに眼目をおく。最近研究が進展しつつあるのが、ある種の構造を付加したK3曲面の族に対する4型領域の保型関数を久賀・佐竹の方法により構成し、さらに逆周期写像を具体的に表示するというのがひとつの課題であった。

2. 研究の方法

(1) チェンの理論をモチーフの枠組みのなかで実現するにはブロックの高次チャウ群を計算する複体に微分次数加群の構造を導入することが必要となる。まずこれに関してホモトピー的な準備をすること。この準備のもとに、混合タイトモチーフの圏あるいは混合楕円モチーフの圏をホップ代数上の余加群の圏とみなすことができることを定式化することをまずはじめの目標とした。そのためにボンダル・カプラノフの微分次数圏の考え方が統一的な視点をあたえる。

(2) 混合楕円モチーフに関する研究を行った。代数多様対のコホモロジーにおいて、楕円曲線の1次のコホモロジーはTate構造の次に基本的な対称物であり、これを普遍的なコホモロジー理論であるmotifで考えたものがelliptic motifである。このように考えると、elliptic motifの反復拡大で得られるmixed elliptic motifは、Tate motifの反復拡大で得られるmixed Tate structureの次に基本的であると思われる。これに相対完備化の方法を用いて研究を行った。

4. 研究成果

(1) Artin-Schreier DGAは有限体上に定義された代数多様体Xに対して定義されるArtin-Schreier DGA上の平坦接続の圏と有限体係数のエタール層の圏同値よりそのバー複体は基本群のp-進完備化を代数群と見たときの座標環となることを示した。さらにこれにバー複体の観点からホップ代数の構造を導入した。

(2) 射影直線上の3重被覆に関するトマエの公式の精密化を行った。3重被覆については2色グラフのデータにより斜交基底を構成し、さらに3重被覆の安定退化を考えることにより、トマエの公式に現れる定数を決定した。また同様の公式を三次曲面からえられるアルコック・カールソン・トレドの多様体について同様の定理を得た。E6ワイル群の作用により都合よくふるまうトマエの公式を得た。また射影平面の被覆として表わされるある種のK3曲面のトマエの公式を導いた。

(3) 混合楕円モチーフについては、その圏の構成をHopf代数の構成することにより行った。その延長として混合楕円モチーフに対応するホップ代数をその生成元と関係式で表わすという問題を考えた。とくに保型多様体を基礎多様体として考えるとき、その生成元にどのような関係式が存在するか、という問題を単数基準写像とL関数の特殊値との

関係を表わすペイリソン予想を証明することにより、この問題に関する重要な部分が解決した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- (1) TERASOMA, T., Algebraic correspondences between genus three curves and certain Calabi-Yau varieties, Amer. J. Math. 132 (2010), no. 1, 181--200.
- (2) MATSUMOTO, K. -TERASOMA, T., Arithmetic geometric means for hyperelliptic curves and Calabi-Yau varieties, Internat. J. Math. 21 (2010), no. 7, 939--949.
- (3) TERASOMA, T., The Artin-Schreier DGA and the Fp fundamental group of an Fp scheme, to appear from Proceedings of International conference Tata Institute, Cycles, motives and Shimura varieties, Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai, India. 2010.
- (4) MATSUMOTO, K. -TERASOMA, T., Thomae type formula for K3 surfaces given by double covers of the projective plane branching along six lines, to appear from Reine und Angewandte Mathematik
- (5) TERASOMA, T., DG-category and simplicial bar complex, Mosc. Math. J. 10 (2010), no. 1, 231--267.

[学会発表] (計 17 件)

- (1) Relative completion and Beilinson conjecture for Kuga fiber space, Seoul-Tokyo Conference on Arithmetic and Algebraic Geometry, 2010/11/27, KIAS, Seoul, Korea.
- (2) Relative DGA, associated DG category and mixed elliptic motif, Motives and Homotopy Theory of Schemes, Oberwolfach, Germany, 2010/5/16--22.
- (3) Motivic construction of relative completion, 2009/7/6, 1st PRIMA

Congress, Sydney.

- (4) Bar complex and Tannakian category, seminaire de theorie des nombres, 2009/10/19, Jussieu, Paris
- (5) DG category, Bar complex and their applications, in Cycles, Motives and Shimura Varieties, 2009/1/7, Tata Institute Mumbai.
- (6) Thomae's formula and binary tree, 城崎代数幾何シンポジウム、2008/10/21
- (7) Thomae's formula for triple covering and binary trees, in International conference on Complex Geometry, Hanoi University of Education, 15th 2008/1/15.

[その他]

ホームページ等

<http://gauss.ms.u-tokyo.ac.jp>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

寺杣友秀 (Tomohide Terasoma)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：50192654