

自己評価報告書

平成23年 4 月 19 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2011

課題番号：20540011

研究課題名（和文）一般化されたバルマ加群の研究

研究課題名（英文）Study of generalized Verma modules

研究代表者

松本 久義 (MATUMOTO HISAYOSI)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：50272597

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：ユニタリ表現、一般化バルマ加群、一般化旗多様体、半単純リ一群

1. 研究計画の概要

(1) スカラー型の一般化された Verma 加群の間の準同型の分類は研究代表者の研究によって一次元表現からの誘導表現であるようなスカラー型と言われる場合には 極大放物型部分群の場合に問題が解決されると同時に一般的な放物型部分群に対応するような場合にも組織的に準同型が構成された。そこで、一般的な放物型部分群に対しては上述のやり方で構成された準同型で全てが尽くされるかどうかということが問題になる。スカラー型の場合に問題の解決を目指したい

(2) 一般化された Verma 加群の完備化を考えその中により複雑な対象である Whittaker 加群を構成するという Kostant-Lynch のアイデアがあるが研究代表者はこのアイデアを整備し、いくつかの基本的な性質を確かめたのち応用として、Harish-Chandra 加群の Whittaker dual についての基本的な結果を得ていた。一方 Lynch は学位論文において Kostant の結果をより一般的な状況に拡張し戸田格子の量子化の一般化とでも言うべき非可換代数を得た(有限 W 代数)。有限 W 代数の既約加群と既約 Whittaker 加群は自然に対応する。長い間、有限 W 代数の意義は不明であったが近年になり Affine Lie 代数に付随する W -代数と密接な関連があることが指摘され多くの研究者の興味を引くようになって来ている。A 型の場合は Brundan, Kleshchev によ Kostant-Lynch のアイデアによって全ての既約 Whittaker 加群が得られるこ

とがわかっているが、それ以外の場合には、研究代表者によって得られた反例などがあり事情は複雑である。このテーマについて 2 つ取り組みたい問題がある。まずは A 型以外の場合に任意の既約 Whittaker 加群を一般化された Verma 加群の完備化の中に実現できるかという問題である。もう一つは以下のような問題である。連続 Whittaker vector の空間は有限 W -代数の加群になることが知られていた。そこで、古典的な重複度 1 定理の自然な一般化として連続 Whittaker vector の空間は有限 W -代数加群として既約であるという予想が出てくる。研究代表者はこの予想が A 型の群などで肯定的であることを示した。この方向の研究も推し進めたい。

2. 研究の進捗状況

(1) スカラー型の一般化された Verma 加群の分類についてはある実形の極小放物型部分代数の複素化に対応する場合は $SO(p,q)$ で $p+q$ が奇数になる場合以外には大きな進展があった。特にクラス 1、正則かつ整なパラメータについては存在条件がわかる。

(2) 連続 Whittaker vector の空間は有限 W -代数加群として既約であるという予想は $SO_0(2n,1)$ に対して肯定的であるが $SO(2n,1)$ に対しては離散系列表現に対して否定的であることがわかった。そこで、有限 W -代数だけでなく、連続 Whittaker vector の空間に作用するある群の作用を加味すると既約になるという修正を予想に施すと $SO(p,q)$ で $p+q$ が奇数の場合でも修正された予想は正しいことが確かめられ

た。

(3) 放物型部分代数が局所有限に作用する複素半単純リー代数の有限生成加群の作る圏（いわゆる放物型 O 圏）から Whittaker 加群の作る圏への関手が以前から定義されていたが、単純加群の像を $\mathfrak{so}(2n,1)$ の極小放物型部分代数の複素化と $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ の Jacobi 放物型部分代数の場合に調べた。放物型 O 圏は Soergel の結果によりこの 2 つの場合は同型になるのであるが、一般化された旗多様体についての moment map が像の上で双有理になるかどうか違ってくるのが効いてきて、Whittaker 加群を対応させる関手の挙動はまったく異なる。一方で Whittaker vector の空間にはある有限群が作用するがその作用込みで考えるといままで調べた例では Whittaker 加群の圏と放物型 O 圏の構造は小さい加群を除いては同じになるという現象を確認している。一般の場合にどうなっているのかを調べるのは今後の課題である。また、今まで結果が知られていた moment map の双有理性が成り立つ場合でない時の退化主系列表現の連続 Whittaker vector を（パラメーターの正值性の仮定の下で）partial Jacquet integral として構成した。

3. 現在までの達成度

③やや遅れている。

Whittaker vector についての研究はその空間に作用する有限群の重要性が認識され理解が深まったが、主要な問題として設定していたスカラー型の一般化された Verma 加群の間の準同型の分類についてはある実形の極小放物型部分代数の複素化に対応する場合は $SO(p,q)$ で $p+q$ が奇数になる場合がうまくいっていない。この場合について、ランクが 2 の一番簡単な場合にはすでに解決済みであったが、一般の場合は状況が複雑であり新しいアイデアが必要かもしれない。

4. 今後の研究の推進方策

Whittaker vector については今後は具体例の計算などを進め有限群の空間への作用についての理解を深めたい。スカラー型の一般化された Verma 加群の間の準同型の分類については現状上記の未解決な部分があるため結果があまりすっきりしないものになっているのが残念であるが論文として発表することにしたい。

5. 代表的な研究成果

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 0 件）

〔学会発表〕（計 6 件）

① Whittaker modules and vectors associated with the Jacobi parabolic subalgebras, "The 10th Workshop on Nilpotent Orbits and Representation Theory", 九州大学, 2011 年 2 月.

② On a finite W -algebra module structure on the space of continuous Whittaker vectors for an irreducible Harish-Chandra modules, "The 9th Workshop on Nilpotent Orbits and Representation Theory", Hokkaido 北海道大学, 2010 年 2 月.

③ On existence of homomorphisms between generalized Verma modules, "Representation Theory of Real Reductive Groups", ユタ大学, 2009 年 7 月.

④ On homomorphisms between scalar generalized Verma modules, The 8th Workshop on Nilpotent Orbits and Representation Theory, 雄琴, 2009 年 3 月.

⑤ On homomorphisms between scalar generalized Verma modules, Conference in honor of Toshio Oshima's 60th birthday "Differential Equations and Symmetric Spaces, 東京大学 2009 年 1 月

⑥ On homomorphisms between scalar generalized Verma modules, Mini-Workshop on Representation Theory, 東京大学 2008 年 9 月