様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年６月１日現在

機関番号：１２６１３
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2008～2010
課題番号：２０５４００１２
研究課題名（和文）　格子頂点作用素代数を用いたＷ代数の既約表現の研究

研究課題名（英文）　Research on irreducible representations of W-algebras
　　　　　　　　　　by using lattice vertex operator algebras
研究代表者
　山田　裕理（YAMADA HIROMICHI）
　一橋大学・大学院経済学研究科・教授
　研究者番号：５０１３４８８８

研究成果の概要（和文）：最も重要なＷ代数のひとつであるパラフェルミオン頂点作用素代数について、格子頂点作用素代数の理論を用いて既約加群を構成した。また、4 個の元からなる生成系に関する作用素積展開を計算し、さらにウエイトがそれぞれ 8, 9, 10 の特異ベクトルを決定した。レベル k が小さい場合については、ウエイトが k+1 である別の種類の特異ベクトルを計算することにより、既約加群の分類を完成させるとともに、有理性および C_2 有限性を証明した。

研究成果の概要（英文）：We study parafermion vertex operator algebras, which form an important family of W-algebras. Its irreducible modules are constructed by using the theory of lattice vertex operator algebras. The operator product expansions among the four generators are obtained. Moreover, the singular vectors of weight 8, 9, and 10 are determined. In the case of small level k, we calculate another singular vector of weight k+1. We use the singular vector to classify the irreducible modules and establish rationality and C_2-cofiniteness.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２００９年度	1,000,000	300,000	1,300,000
２０１０年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：頂点作用素代数、Ｗ代数

１．研究開始当初の背景

(1) Ｗ代数の研究の出発点とされるのは 1985 年の Zamoldchikov の論文であるが、その萌芽は古く、1978 年の Gelfand-Dickij の論文に見ることができる。また、1984 年の Drinfeld-Sokolov による論文も重要である。その後 1980 年代の終わりから 1990 年代の初めにかけて、アフィンリー代数と可積分系の関係に注目した研究がなされている。 1985 年の Zamoldchikov の論文では、ヴィラソロ場にひとつのプライマリー場を付け加えて生成される代数が考察された。

(2) その後、1988 年に Fateev-Lukyanov が Drinfeld-Sokolov の手法を量子化して、ユニバーサルなＷ代数を構成した。この方法はさらに、1989 年の Bershadsky-Ooguri、1990 年の Figueroa-O’Farrill の論文などにより、

量子 Drinfeld-Sokolov リダクションと呼ばれる BRST コホモロジーを用いる方法に改良された。量子 Drinfeld-Sokolov リダクションは、アフィンリー代数を基にして、数多くの W 代数およびその表現を構成するのにきわめて有効である。

(3) この方法を用いた W 代数の表現の研究は、1992 年の Frenkel-Kac-Wakimoto の論文により始められた。Frenkel-Kac-Wakimoto の論文では、多くの重要な問題が予想として残された。それらのうちのいくつかは、ようやく最近になって荒川知幸により証明された。特に、量子 Drinfeld-Sokolov リダクションにより得られるユニバーサルな W 代数の Zhu 代数の決定、および既約表現の分類は著しい結果である。

(4) これとは別に、アフィンリー代数から定義される頂点作用素代数において、その部分代数からコセット構成法により様々な W 代数を構成することができる。このような W 代数の構成は、主として物理の方向から、1980 年代の終わりから 1990 年代中頃にかけて活発に研究された。

(5) 格子から定義される頂点作用素代数（以下格子頂点作用素代数と呼ぶ）は、性質の良い頂点作用素代数であり、その内部構造として様々な部分代数を含むことが知られている。格子頂点作用素代数の内部構造に関する研究の契機となったのは、A, D, E 型のルート格子を基にして定義される頂点作用素代数の中に互いに可換な共形元を構成した 1998 年の Dong-Li-Mason-Norton による論文である。実際、共形元により生成されるヴィラソロ頂点作用素代数のテンソル積の加群として格子頂点作用素代数を調べることにより、多くの情報を得ることが可能になる。

(6) Dong-Li-Mason-Norton が構成した共形元には、中心電荷がヴィラソロ代数の極小系列に属するもののほかに、もうひとつ別の種類のものがある。格子が A 型の場合には、その共形元はパラフェルミオン代数と同じ中心電荷を持つことが知られていた。研究代表者は Ching Hung Lam との 2004 年の研究において、A 型のルート格子を基にして定義される頂点作用素代数の場合に、パラフェルミオン代数と同じ中心電荷を持つ W 代数が部分代数として含まれることを証明した。この W 代数は、Fateev-Lukyanov が 1988 年に構成したユニバーサルな W 代数のうち、パラメータが特別な値をとる場合のものと密接に関係することが予想される。このような背景のもとに、パラフェルミオン代数と関係する W 代数(以下パラフェルミオン頂点作用素代数と呼ぶ)の性質を詳しく調べることが本研究の動機である。

２．研究の目的

(1) 本研究の目的は、パラフェルミオン頂点作用素代数と呼ばれる W 代数について、

①生成元を決定し、それらの関係を記述すること

②既約表現を決定すること

③有理性および C_2 有限性を証明すること

の 3 つを中心的な課題として、その性質を詳しく調べることである。Fateev-Lukyanov の構成したユニバーサルな W 代数との関係を明らかにすることも重要な問題と考える。

(2) 格子頂点作用素代数は、正定値不変双線型形式をもつので、その内部に含まれる部分代数および表現はユニタリである。研究対象とする W 代数が単純であることも、この理由による。格子頂点作用素代数は有理的であり、既約表現およびフュージョンルールも良く知られている。また、格子頂点作用素代数では、様々な計算を見通しよく行うことができる。本研究の特徴は、W 代数を格子頂点作用素代数の部分代数として調べることである。この手法により、格子頂点作用素代数の一般論を利用することが可能になる。たとえば、格子頂点作用素代数の既約表現に関する知識を援用することにより、研究対象の W 代数の既約表現を具体的に構成することができる。このことは、研究目標である既約表現の分類に対して極めて有効である。従来研究されてきた手法は、アフィンリー代数の理論を活用するものであった。格子頂点作用素代数の観点から W 代数を扱うという本研究は、今までのものとは異なる独創性の高いものといえる。

(3) Ching Hung Lam との 2004 年の研究の動機は、Frenkel-Lepowsky-Meumann が 1988 年に構成したモンスター頂点作用素代数をより良く理解することにあった。実際、レベル k が 3 の場合には、研究対象のパラフェルミオン頂点作用素代数はモンスター単純群の 3B 元と呼ばれる位数 3 の元と関係することが予想されている。さらに、Ching Hung Lam、山内博との 2005 年および 2007 年の研究により、モンスター単純群の 3C 元および 5A 元と呼ばれるそれぞれ位数 3 と 5 の元との関係も示唆されている。モンスター頂点作用素代数への応用を念頭に置きつつ、研究を進めることが肝要である。

(4) ユニバーサルな W 代数は、単純な W 代数ではない。また、コセット構成法により構成される W 代数の多くも、同様に単純な W 代数ではない。これらは一般に、唯一つの極大イ

デアルを持ち、その極大イデアルによる剰余代数は単純なW代数になる。本研究で考察の中心となるパラフェルミオン頂点作用素代数は、単純なW代数であることに注意する。

３．研究の方法

(1) パラフェルミオン頂点作用素代数は、レベルkの単純な A_1 型アフィン頂点作用素代数における中心電荷 1 のヴィラソロ代数のコセットでもある。レベルkの単純な A_1 型アフィン頂点作用素代数は、階数１のA型ルート格子k個の直和から定義される頂点作用素代数に埋め込むことができる。このような背景のもとに、パラフェルミオン頂点作用素代数を、アフィンリー代数の理論および格子頂点作用素代数の理論の両方を活用して研究した。

(2) レベルkの単純な A_1 型アフィン頂点作用素代数は、レベルkの A_1 型アフィンリー代数の真空表現のなす頂点作用素代数の準同型像である。この頂点作用素代数における中心電荷１のヴィラソロ代数のコセットは、Hornfeck らにより W(2,3,4,5)代数として知られている。パラフェルミオン頂点作用素代数は、このW(2,3,4,5)代数の準同型像である。一般に、W 代数の既約表現を分類するためには、W 代数の特異ベクトルを求めることが肝要である。パラフェルミオン頂点作用素代数の特異ベクトルには、(i) W(2,3,4,5)代数の特異ベクトルの準同型像であるもの、(ii) レベルk、階数１のA型アフィンリー代数から定義されるアフィン頂点作用素代数の特異ベクトルと関連するウエイトがk+1の特異ベクトル、の 2 つの種類がある。(i)のタイプの特異ベクトルは物理では null field と呼ばれるが、そのうちのウエイトが大きくないものについては、任意のレベルkに対して計算可能である。一方、(ii)のタイプの特異ベクトルは、レベルkが一般の場合に計算することは困難である。本研究ではkが小さい場合に計算し、その結果を詳細に検討した。

(3) 具体的には次の5つのステップに分けて研究を進めた。

①A_1型ルート格子k個の直和から定義される格子頂点作用素代数の理論を用いて、全部でk(k+1)/2個あると予想されるパラフェルミオン頂点作用素代数の既約加群を構成した。

②パラフェルミオン頂点作用素代数の4個の strong generator に関する作用素積展開を決定した。

③null field のうちウエイトが大きくないものについて、4個の生成元を用いて記述した。

④レベルk、階数1のA型アフィンリー代数から定義されるアフィン頂点作用素代数の特異ベクトルと関連するウエイトがk+1のパラフェルミオン頂点作用素代数の特異ベクトルを、k が6以下の小さい場合に4個の生成元を用いて記述した。

⑤以上の結果に基づき、k が6以下の小さい場合にパラフェルミオン頂点作用素代数の既約加群を分類した。さらに、kが6以下の場合にパラフェルミオン頂点作用素代数の有理性と C_2 有限性も証明した。

(4) 上記(3)の②、③、④で必要となる複雑な計算を実行するために、計算機代数システム Asir、および汎用のシステムとして定評のある Mathematica を活用し、必要な計算プログラムを開発した。

４．研究成果

(1) パラフェルミオン頂点作用素代数は、階数１のA型ルート格子のk個の直交和から定義される頂点作用素代数に含まれる。平成20年度では、格子頂点作用素代数の理論を用いて、k(k+1)/2個のパラフェルミオン頂点作用素代数の既約加群を構成した。また、W 代数W(2,3,4,5)の4個の生成元に関する作用素積展開を決定した。さらに、ウエイトがそれぞれ 8, 9, 10 の null field を、4個の生成元を用いて具体的に記述することができた。これらの計算には、主として計算機代数システム Asir を用いた。補助的には、汎用の数式処理システムである Mathematica も活用した。研究成果の概要は、Bulgarian Journal of Physics の第35巻に掲載された。また、イリノイ州立大学(米国)で開催された国際研究集会において報告した(2008年7月10日)。

W(2,3,4,5)代数の4個の生成元に関する作用素積展開の完全な記述は、本研究により初めて得られたものであり、今後のこの方面の研究にとって高い価値がある。

(2) 平成 21 年度では、過去数年間の研究により得られた結果と合わせて、レベルkが5と6の場合についてパラフェルミオン頂点作用素代数の既約表現の分類および有理性と C_2 有限性の証明を完成させることができた。これらの成果を、Chongying Dong, Ching Hung Lam との共著論文として Journal of Algebra の第322巻に発表した。証明において重要なのは、レベルk、階数１のA型アフィンリー代数から定義されるアフィン頂点作用素代数の特異ベクトルと関連するウエイトが k+1 の特異ベクトルを、4 個の生成元を用いて具体的に記述することである。この特異ベクトルは複雑なため、現時点では残念ながらレベルkが小さい場合を除いて計算できない。パ

ラフェルミオン頂点作用素代数の既約表現の分類および有理性と C_2 有限性を、任意のレベル k に対して証明するためには、新しい方法を導入する必要があると思われる。

パラフェルミオン頂点作用素代数の構造に関する課題について、一般のレベル k の場合に、Chongying Dong, Ching Hung Lam, Qing Wang と研究を進め、得られた結果を Journal of Algebra の第 323 巻に発表した。そこでは、レベル k、階数 1 の A 型アフィンリー代数から定義されるアフィン頂点作用素代数の特異ベクトルと関連するウエイトが k+1 の特異ベクトルの性質を、リー代数 sl_2 の表現論を用いて調べるという手法を採用した。この手法は、基本的にレベル k に依存しないため、k が小さい場合に限ることなく一般の場合の結果を得ることが可能となる。さらにこの論文では、Journal of Algebra の第 322 巻に掲載された論文において未解決であったいくつかの重要な問題を解決しており、パラフェルミオン頂点作用素代数の研究進展に寄与した。

パラフェルミオン頂点作用素代数とモンスター頂点作用素代数との関係にも関連することであるが、格子頂点作用素代数の位数 3 の自己同型による固定点からなる部分代数について、田辺顕一朗と研究を行い、その成果を European Journal of Combinatorics の第 30 巻に発表した。

日本数学会秋季総合分科会（2009 年 9 月 27 日）で報告したほか、東京大学玉原国際セミナーハウスで開催された研究会（2009 年 8 月 22 日）および RIMS 研究集会（2009 年 11 月 17 日）でこれらの研究成果に関する講演を行った。

(3) 平成２１年度までの研究は、既約表現の分類を中心とする、パラフェルミオン頂点作用素代数の基本的構造および特異ベクトルの性質に関するものであった。平成２２年度では、パラフェルミオン頂点作用素代数とレベル k、階数 1 の A 型アフィン頂点作用素代数との関係について、荒川知幸、Chongying Dong、 Ching Hung Lam と研究を進め、一定の条件の下で両者の関係を解明した。そこで用いた議論は、階数 1 の格子から定義される格子頂点作用素代数の既約加群のフュージョンルールを用いるという、独創性の高いものである。その議論は、レベル k が任意の正の整数の場合に対して適用できることにも注意する。この研究の過程では、レベル k、階数 1 の A 型アフィン頂点作用素代数を、その既約表現を用いて特徴づけるという、興味深い結果も副産物として得られている。研究成果は、中国科学院理論物理研究所で開催された特別プログラム(2010 年 8 月 3 日)において報告された。また、関連する結果を日本数学会秋季総合分科会(2010 年 9 月 22 日)において発表した。

さらに、レベル k が任意の正の整数の場合でのパラフェルミオン頂点作用素代数の C_2 有限性についても考察した。そこで得られた研究成果は、台湾の National Center for Theoretical Sciences(2010 年 9 月 3 日)で報告した。

(4) 平成 22 年度に開始したパラフェルミオン頂点作用素代数の C_2 有限性に関する研究を進展させることは、今後の課題のひとつである。C_2 有限性を証明する際にも、特異ベクトルを詳細に調べることがキーポイントである。2 種類の特異ベクトルのうち、レベル k、階数 1 の A 型アフィンリー代数から定義されるアフィン頂点作用素代数の特異ベクトルと関連するウエイトが k+1 のパラフェルミオン頂点作用素代数の特異ベクトルについては、きわめて複雑な形が予想されることもあり、レベル k が一般の正の整数の場合に計算することは困難である。その一方で、C_2 有限性を証明するために必要な情報は、特異ベクトルの正確な形ではなく、Zhu のポアソン代数における準同型像の形である。パラフェルミオン頂点作用素代数の場合、Zhu のポアソン代数は 4 変数の多項式環の準同型像であるので、頂点作用素代数と比較してはるかに扱いやすい。そのため、Zhu のポアソン代数における特異ベクトルの準同型像の形を調べることは可能であると予想される。それができれば、パラフェルミオン頂点作用素代数の C_2 有限性の証明に向けて大きく前進する。また同時に、特異ベクトル自身についても理解が深まることになり、将来の研究に資するものと期待される。

モンスター単純群のいくつかの元とパラフェルミオン頂点作用素代数との関係は、本研究の動機のひとつであった。モンスター単純群との関係を解明するためには、フェルミオン頂点作用素代数の既約加群の分類およびフュージョンルールの決定を含む、より深い研究が必要である。この方向の研究も、今後の課題といえる。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

① J. An, F. Himstedt, S. Huang, H. Yamada, Uno's invariant conjecture for the finite symplectic group $Sp_4(q)$ in the defining characterictic, Communications in Algebra, 査読有, Vol. 38, 2010, pp. 3868-3888

② C. Dong, C.H. Lam, Q. Wang, H. Yamada, The structure of parafermion vertex operator algebras, Journal of Algebra, 査読有, Vol. 323, 2010, pp. 371-381

③ C. Dong, C.H. Lam, H. Yamada, W-algebras related to parafermion algebras, Journal of Algebra, 査読有, Vol. 322, 2009, pp.2366-2403

④ K. Tanabe, H. Yamada, Representations of a fixed-point subalgebra of a class of lattice vertex operator algebras by an automorphism of order three, European Journal of Combinatorics, 査読有, Vol. 30, 2009, pp.725-735

⑤ C. Dong, C.H. Lam, H. Yamada, W-algebras in lattice vertex operator algebras, Proceedings of the VII International Workshop on Lie Theory and Its Applications in Physics, Bulgarian Journal of Physics, 査読有, Vol. 35, 2008, pp.25-35

〔学会発表〕(計８件)

①山田裕理, パラフェルミオン頂点作用素代数の特徴づけ, 日本数学会秋季総合分科会, 2010年9月22日, 名古屋大学

②山田裕理, Properties of parafermion vertex operator algebras, Mini-Workshop on infinite dimensional Lie algebras and related topics, 2010年9月3日, National Center for Theoretical Sciences(台湾)

③山田裕理, A characterization of parafermion vertex operator algebras, QFT, String Theory and Mathematical Physics, 2010年8月3日, 中国科学院理論物理研究所(中国)

④山田裕理, パラフェルミオン代数に付随する頂点作用素代数, RIMS研究集会「代数的組合せ論および関連する群と代数」, 2009年11月17日, 信州大学

⑤山田裕理, パラフェルミオン代数に付随する頂点作用素代数の構造, 日本数学会秋季総合分科会, 2009年9月27日, 大阪大学

⑥山田裕理, Commutant and orbifold of some lattice vertex operator algebras, Algebras, Groups and Geometries 2009 in Tambara, 2009年8月22日, 東京大学玉原国際セミナーハウス(群馬県)

⑦山田裕理, W-algebras related to parafermion algebras, International Conference on Vertex Operator Algebras and Related Areas, 2008年7月10日, Illinois State University(米国)

⑧山田裕理, Lattice vertex operator algebras and the Monster simple group, Sixth Shanghai Conference on Combinatorics, 2008年5月27日, 上海交通大学(中国)

〔その他〕
ホームページ等
http://www.econ.hit-u.ac.jp/~koho/jpn/introduce/professor/MA_yamada.html

６．研究組織
(1)研究代表者
山田　裕理（YAMADA HIROMICHI）
一橋大学・大学院経済学研究科・教授
研究者番号：５０１３４８８８

(2)研究協力者
荒川　知幸（ARAKAWA TOMOYUKI）
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号：４０３７７９７４
田辺　顕一朗（TANABE KENICHIRO）
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：１０３３４０３８
Chongying Dong
University of California・
Department of Mathematics（アメリカ）・教授
Ching Hung Lam
Academia Sinica（台湾）・教授
Qing Wang
Xiamen University・
School of Mathematics（中国）・助教授