様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年５月１６日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：２００８　～　２０１０
課題番号：２０５４００１５
研究課題名（和文）　リジッド幾何学とその応用的展開

研究課題名（英文）　Rigid geometry and its applicative developments

研究代表者
加藤　文元（KATO FUMIHARU）
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：５０２９４８８０

研究成果の概要（和文）：リジッド幾何学の将来的な応用を見据えた基礎付けとして、対応するZariski-Riemann 空間の位相的性質や、その土台部分をなす環論の基礎付けを行い、多くの有用な結果を得た。またその基礎付けに至る過程で、数理物理学や非アルキメデス的一意化理論などへの応用の新たな可能性が明らかとなった。特に後者については、非アルキメデス的一意化に関係した不連続格子について、従来の理論では１次元の場合に限って有効であった手法を多次元に応用する道が開かれた。

研究成果の概要（英文）：We have obtained numerous useful and essential results in topological feature of Zriski-Riemann spaces associated to rigid spaces and their ring-theoretic bases, which provide foundations of rigid geometry itself with the perspective of future applications. In doing so, we have found several new perspectives for some “immediate” applications in, for example, mathematical physics and non-archimedean uniformizaions. In the latter field, in particular, one has a new approach to higher dimensional uniformizations, which yields several new results on discrete lattices, by means of the orbifold-like techniques, already known in one dimensional situation.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２００９年度	1,300,000	390,000	1,690,000
２０１０年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：代数学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：リジッド幾何学、モジュライ理論

１．研究開始当初の背景

(1) リジッド幾何学は 1960 年代初頭に J. Tate によって導入された比較的に新しい幾何学の体系であるが、その基礎付けには環論などの技術的に困難な部分があり、多くの問題を抱えていた。

(2) その一つの現れとして、リジッド幾何学には、一見相異なるような複数のアプローチが混在し、そのため効果的な応用への展開が阻害される傾向にあった。

２．研究の目的

(1) リジッド幾何学の展開のために必要な環論的・位相的基礎付けを行い、リジッド幾何学全体をより強固な基盤の上に定位させる。

(2) 上記の基礎付けを踏まえて、数論幾何学や数理物理学などへの広く有用な応用的展開を図る。

３．研究の方法

(1) リジッド幾何学全体に関わる理論の基礎付けのために、既存のリジッド幾何学への種々のアプローチを検討し、その問題点や有用なポイントを探る。

(2) 主に古典的なZariskiによる双有理幾何学の枠組みとの類似（analogy）を見極め、その位相的な性質や、それを反映する付値の理論のリジッド幾何学にへの適用について詳細に検討する。

(3) 理論の基礎付けと従来の理論の様態との間のフィードバックを適宜図り、将来の応用のために適切な基礎理論を構築する。

４．研究成果

(1)付値環や付値体についての代数的な理論、またその付値に関する組合せ論的側面に関して：これは主に21年度に行った。リジッド幾何学と関わる場合、つまり形式スキームから構成される Zarisk-Riemann 空間の場合は、高さ 1 の素点が各点の極大generizationを構成するが、これらの点からなる空間、いわゆる分離商（separated quotient）の構造を記述することが重要となる。これらに関連した点論的問題、スペクトラル函手の基本性質などが重要な問題となり、これがひいては古典的なリジッド解析学における古典的なリジッド空間や、Berkovich 空間などの関連した理論の対象との関連性を深く知る上で重要な鍵となる。環付空間としての幾何学的考察においては、特にその《代数幾何学》的側面との関連が重要であり、GAGA（解析幾何学vs代数幾何学）的側面や、アフィノイドと呼ばれる空間の場合には関連するスキームとの関係を詳細に解明することが必要である。そのため、これらについて精密で徹底的な理論を構成し、より一般的で網羅的な理論の枠組みの構築を目指した。さらに21年度は、リジッド幾何学的視点から以前取り上げていた、正標数における分岐の変更理論にも、その応用的展開を目指し、conductor が高い場合の分岐の変形について、興味深い現象を観察することにも成功した。

(2) Zariski-Riemann空間の位相的性質に関して：上記の分離商写像と既存の理論（例えばBerkovichの理論）を通じて、Zariski-Riemann空間の位相的性質、特にそのホモトピー的構造について、いくつかの知見が得られた。これらは将来的に一意化（uniformization）の理論に応用するための準備中である。

(3) 代数的な基礎付け、具体的には環論的な基礎付けについて、藤原一宏およびOfer Gabberとの共同研究（下記〔雑誌論文〕参照）をさらに進めて、論文の続編を準備している。この方面での研究成果は、本研究において最も実り多かった部分の一つであり、「普遍的にネーター的（universally Noetherian）」なリジッド空間の理論は、これによって完全に完成したと言ってもよいところまで到達することができた。もちろん、普遍的にネーター的なリジッド空間を使わなければならない状況は、近い将来起こる可能性があり（実際、p-進ホッジ理論などの枠組みではそのようなニーズがある)、更なる一般化と基礎付けが要求される。

(4) 以上の研究成果とZariski-Riemann空間の《幾何学的対象》としての基本的性質の確立は、近々刊行される専門書『Foundations of rigid geometry』(藤原一宏との共著、ヨーロッパ数学会出版に投稿中）において発表の予定である。この本は、今後継続して出版を予定してる一連のプロジェクトの最初の巻（第一巻）であり、そこでは以下のような順序で、リジッド幾何学の新しい基礎理論が展開される予定である：

第一章：準備―――理論の準備のための章であるが、ここだけでも10節ほどの内容を持ち、全部で200ページを超える分量がある。この中で、特に代数的な極限操作の技術的な部分、例えば層や層のコホモロジーなどどの可換性の問題など、が詳細に検討されており、この基礎部分だけでも従来にはなかった新しい方法論が開発されている。

第二章：形式幾何学―――リジッド空間を定義するための前段階として不可避な形式スキームの理論を展開する。ここで重要なポイントは、リジッド空間の形式モデルは（当のリジッド空間が普遍的にネーター的であっても）ほとんど常にネーターでは与えられないということを踏まえて、従来の理論（例えばグロタンディークのEGA）ではカバーできなかった部分をやり直さなければならないということである。また、将来的なモジュライ理論への応用も踏まえて、代数的空間（algebraic spaces）に付随したリジッド空間をも議論するために、形式代数空間（formal algebraic spaces）の理論を徹底的に展開する必要があり、その意味でも従来の理論からを大きく超え出たものになっている。

第三章：リジッド幾何学――――以上の準備を踏まえて、リジッド空間を導入し、その位相的性質、代数幾何的性質などについて徹底的に議論する。

以上の他に、各章に多くの新しい知見を含んだ補遺を設定する。特に第二章の補遺には、GAGA関手の構成のために不可避である、永田のコンパクト化（の一般化）について論じている。その意味で、この本はリジッド幾何学のみならず、古典的な代数幾何学や数論幾何学全体に対しても有用で新しい知見を与えるものと奇態できる。

なお、以上の第一巻の後には第二巻、第三巻を予定しており、特に第二巻では

・形式平坦化（formal flattening）
・アフィン延長理論（affine enlargement）
・同値性定理（equivalence theorem）

が述べられる予定である。特にアフィン延長理論の構築によって、これまで未知であった、リジッド幾何学における「固有性（properness)」の定義の同値性の問題が解決される見込みである。

(5)理論の《基礎的》側面と《展開的》側面の間のフィードバックという点では、国内外の研究者との交流、特に 2011 年 1 月の研究集会『Arithmetic and algebraic geometry 2011』において得られた交流の場では、多くの有用な知見を得ることができた。特に最近、Hrushovski と Loeser によって、モデル理論を応用してリジッド空間の位相的な性質について多くの重要な知見を得ることができることがわかっており、この線でのアプローチも、今後の課題として重要になってくると思われる。また、モジュライ理論への応用に関連しては、すでに本研究の研究代表者によって、いわゆる偽射影平面（fake projective plane）の数論幾何的性質、特にその志村多様体（ある種の乗法構造を持ったアーベル多様体のモジュライ空間）としての構造が研究されているが、これに関連して、将来的にはリジッド幾何学的な枠組み、つまり非アルキメデス的な枠組みでの一意化（uniformization）の理論に、軌道体（orbifold）的一般理論を導入することが必要である。すでに１次元の場合は過去の研究に得られていたが、2 次元以上については、いまだに手探りの状況であり、国内外の研究者たちとの交流によって、少しずつ有用な知見が集まって来ている。例えば D. Allcock との最近の共同研究では、その第一歩として、2 次元の場合の一様格子（uniform lattice）の理論について、ある重要な示唆が得られており、この結果は近々発表する予定である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① Fujiwara, K.; Gabber, O.; Kato, F.: On Hausdorff completions of commutative rings in rigid geometry. To appear（掲載決定） in Journal of Algebra（査読有）

② Cornelissen, G.; Kato, F.; Kontogeorgis, A.: The relation between rigid-analytic and algebraic deformation parameters for Artin-Schreier-Mumford curves. Israel J. Math., 180 (2010), 345-370（査読有）

③ Kato, F.: Topological rings in rigid geometry. To appear in Motivic Integration and its interaction with Model Theory and Non-Archimedean Geometry (ICMS Maxwell Institute, Edinburgh, UK (2008)). LMS Lecture Notes series, Cambridge University Press（査読有）

④ Kato, F.: On the Shimura variety having Mumford's fake projective plane as a connected component. Math. Z., 259 (2008), 631-641（査読有）

〔学会発表〕（計４件）

① "Toward the theory of non-archimedean orbifolds in higher dimensions" Conference "Arithmetic and Algebraic Geometry 2011", Univ. of Tokyo, Jan. 20th, 2011

② "The relation between rigid-analytic and algebraic deformation parameters for Artin-Schreier-Mumford curves" Accessory parameter workshop, Kumamoto University, March 16th, 2010.

③ “The relation between rigid-analytic and algebraic deformation parameters for Artin-Schreier-Mumford curves” Conference “Arithmetic and Algebraic Geometry Related to Moduli Spaces”, Univ. of Tokyo, Jan. 21st, 2009

④ “Topological rings in rigid geometry“, Motivic Integration and its Interaction with Model Theory and Non-Archimedean Geometry, ICMS, Edinburgh (Great Britain), May 15th, 2008

〔図書〕（計２件）

①加藤文元『ガロア——天才数学者の生涯』中公新書、中央公論新社、2010 年、327 ページ

②加藤文元『物語数学の歴史——正しさへの挑戦』中公新書、中央公論新社、2009 年、293 ページ

〔その他〕
ホームページ等
http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~kato/index-j.html

６．研究組織
(1)研究代表者
加藤　文元（KATO FUMIHARU）
京都大学・大学大学院理学研究科・准教授
研究者番号：５０２９４８８０

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：