

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540016

研究課題名(和文) 量子群の表現論と可積分系

研究課題名(英文) Representation Theory of Quantum Groups and Integrable Systems

研究代表者

尾角 正人 (OKADO MASATO)

大阪大学・大学院基礎工学研究科・准教授

研究者番号：70221843

研究成果の概要(和文)：非例外型アフィンリー環に付随する量子群のKR加群に、柏原の意味での結晶基底が存在することを証明し、その結晶構造を決定した。また、KR結晶が完全結晶になるための条件が予想されていたが、それを肯定的に解決した。KR結晶の組合せ論的構造を調べることにより、Shimozono-Zabrockiによる $X=K$ 予想を解決した。一方で、饜装配位の母関数にも同様の関係式が成り立つことを示し、 $X=M$ 予想を非例外型アフィンリー環でランクが十分に大きいときに解決した。

研究成果の概要(英文)：We proved the existence of the crystal bases in the sense of Kashiwara for KR modules of the quantum groups of nonexceptional affine type, and determined their crystal structure. We then settled affirmatively the conjecture on the perfectness of KR crystals. By examining the combinatorial structure of the KR crystal, we solved the $X=K$ conjecture by Shimozono-Zabrocki. On the other hand, we showed that a similar relation holds for the generating functions of rigged configurations, thereby solving the $X=M$ conjecture for all nonexceptional affine types when the rank is sufficiently large.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：可積分系、量子群、ヤン・バクスター方程式

1. 研究開始当初の背景

研究開始当初、量子アフィン代数のKR加群を出発点とする三位一体の構造(KR加群-幾何結晶-KR結晶)がいろいろな例で確認されつつあった。それぞれはまた可積分系とも密接に関係する。この三位一体の関係が、すべてのアフィンリー環の場合にまで拡張されるのかということに興味を持たれつつあった。

2. 研究の目的

前述の三位一体構造をより一般的な場合へと拡張し、互いの関係を詳しく調べるために、次の3つの具体的目標を掲げた。

- (1) 非例外型アフィンリー環に付随する量子アフィン代数について、すべてのKR加群に結晶基底が存在することの証明、および、結晶構造を具体的に決定

- (2) 非例外型量子アフィン代数に対し、KR加群の結晶基底を使って定義される“1次元状態和”と呼ばれる多項式が“フェルミ公式”とよばれるものと一致することの証明
- (3) 代表的なソリトン方程式であるKP方程式の τ 関数の空間に幾何クリスタルの作用を定義する

3. 研究の方法

研究目的の(1)に関しては、海外共同研究者の Schilling 氏 (カリフォルニア大デーヴィス校)、Fourier 氏 (ケルン大) とカリフォルニア大デーヴィス校で共同研究を行った。(2)については Lecouvey 氏 (トゥール大)、Shimozono 氏 (ヴァージニア工科大) が京都大滞在中に始めた共同研究を、その後も電子メールのやり取りで続けることによって行った。また、別の共同研究を坂本氏 (東京理科大) と行った。(3)については中島氏 (上智大) といくつかの研究集会を利用して研究打合せを行った。

また、最新の研究動向を知るために次の研究集会の代表者・組織委員を務めた。

第8回名古屋国際数学コンファレンス
「Combinatorics and Representation Theory」2008年9月1日～5日

RIMS 研究集会「量子可積分系の新潮流」
2009年7月27日～31日

RIMS 研究集会「量子可積分系の展開」
2010年6月14日～16日

さらに、国内外での研究集会に出かけ、研究発表や研究協力者との研究打合せを行った。

4. 研究成果

研究期間の間に得られた研究成果を「研究の目的」欄に記した番号に合わせてまとめると以下ようになる。

(1)

①非例外型KRクリスタルの結晶構造の決定

平成19年に、海外共同研究者の Schilling氏とともに、非例外型アフィンリー環に付随する量子アフィン代数のKR加群には結晶基底が存在することを示し、B型、D型、および、 $A_{2n-1}^{(2)}$ 型の場合にその結晶構造を決定していた。平成20年度は Fourier 氏も共同研究に加わり、非例外型の残りの場合、つまり、C型、 $A_{2n}^{(2)}$ 型、および、 $D_{n+1}^{(2)}$ 型の場合もKRクリスタルの結晶構造を完全に決定した。この結果は、そ

れ自身基本的で重要であるのみならず、フェルミ公式に関する予想やソリトンセルオートマトンへの応用という点でも重要である。

②いつKRクリスタルが完全結晶になるかの予想の解決

アフィンの有限クリスタルには完全結晶という概念があり、それに当てはまる場合はアフィンの最高ウェイト表現のクリスタルをそのクリスタルの半無限テンソル積で表すことができる。フェルミ公式に関連して、我々は2001年にどのようなKRクリスタルが完全結晶になるかの予想を提出したが、この予想を非例外型の場合に Fourier 氏、Schilling 氏との共同研究で解決した。

③テンソル積 $B^{\{r, k\}} \times B^{\{1, 1\}}$ の組合せ論的R行列の像の決定

アフィンリー環の型が $D_n^{\{1\}}$, $B_n^{\{1\}}$ および $A_{2n-1}^{\{2\}}$ で、KRクリスタルのテンソル積が $B^{\{r, k\}} \times B^{\{1, 1\}}$ の場合に最高ウェイト元に対して、組合せ論的R行列の像を坂本氏とともに明示的に求めた。

④ $G_2^{\{1\}}$ 型KRクリスタルの0作用

Misra 氏、Mohamad 氏とともに $G_2^{\{1\}}$ 型KRクリスタルの0柏原作用素の作用を明示的に求めた。また、それらの族が完全結晶の連接族をなすことを示した。

(2)

①“X=K”予想の解決

ランクが大きい時に、A型以外の非例外型KRクリスタルから定義される1次元状態和という多項式が、A型のもとのリトルウッド・リチャードソン係数の和で書けるという Shimozono 氏の“X=K”予想を、最も一般的な場合に Lecouvey 氏と Shimozono 氏との共同研究で証明した。

②非例外型アフィンリー環のランクが十分予想を解決することができる。この方針のもと共同研究者の坂本氏とともに、この関係式を導く組合せ論的な対応を大きい場合に対する“X=M”予想の解決

平成21年度の研究で“X=K”予想を証明したので、“X=M”の右辺であるフェルミ公式の方でも同じ関係式を示すことができれば、A型で既に得られている“X=M”定理を用いることによって、非例外型アフィンリー環のランクが十分大きい場合には“X=K”定義し、その対応が統計量を保存する全単射であることを証明した。坂本氏とはさらに、ランクが十分大きいという仮定をはずした場合の非例外型

アフィンリー環に対する“ $X=M$ ”予想の証明について検討を続けている。

(3) この研究目的について共同研究者の中島氏と検討をしてきたが、成果を見るに至っていない。引き続き検討を続けていく。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

① K.C. Misra, M. Mohamad and M. Okado, Zero action on perfect crystals for $U_q(G_2^{(1)})$, SIGMA 6, (2010), 12 pages (査読有)

② M. Okado and R. Sakamoto, Combinatorial R-matrices for Kirillov-Reshetikhin crystals of type $D^{(1)}_n, B^{(1)}_n, A^{(2)}_{2n-1}$, Internat. Math. Res. Notices 2010, (2010), 559-593 (査読有)

③ G. Fourier, M. Okado and A. Schilling, Perfectness of Kirillov-Reshetikhin crystals for nonexceptional types, Contemp. Math. 506, (2010), 127-143 (査読有)

④ M. Kashiwara, T. Nakashima and M. Okado, Tropical R maps and affine geometric crystals, Represent. Theory 14, (2010), 446-509 (査読有)

⑤ G. Fourier, M. Okado and A. Schilling, Kirillov-Reshetikhin crystals for nonexceptional types, Adv. in Math. 222, (2009), 1080-1116 (査読有)

⑥ K. Kajiwara, M. Kaneko, A. Nobe and T. Tsuda, Ultradiscretization of a solvable two-dimensional chaotic map associated with the Hesse cubic curve, Kyushu Journal of Mathematics 63, (2009), 315-338 (査読有)

⑦ M. Okado and A. Schilling, Existence of Kirillov-Reshetikhin crystals for nonexceptional types, Represent. Theory 12, (2008), 186-207 (査読有)

⑧ K. Kajiwara, A. Nobe and T. Tsuda, Ultradiscretization of solvable one-dimensional chaotic maps, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 41, (2008), 395202 (査読有)

[学会発表] (計 12 件)

① M. Okado, $X=M$ for large rank, ICM Satellite Conference on Algebraic and Combinatorial

Approaches to Representation Theory, August 12 2010, NIAS, Bangalore India

② M. Okado, Stability in parabolic Lusztig q -analogues, one dimensional sums and fermionic formulas, International Conference "Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups '10", August 2 2010, Nagoya University

③ M. Okado, Affine geometric crystals and tropical R maps, RIMS合宿型セミナー「Diagram algebras and related topics」, 2010年7月6日, カルチャーリゾートフェストーンネ (沖縄県宜野湾市)

④ M. Okado, Stable rigged configurations and $X=M$ for sufficiently large rank, RIMS研究集会「量子可積分系の展開」, 2010年6月14日, 京都大学

⑤ 尾角正人, $X=K$ 予想について, 日本数学会 2010 年度年会, 2010年3月26日, 慶応大学

⑥ M. Okado, Crystals and 1 dimensional sums, Algebraic Analysis and Beyond, March 16 2010, Kyoto University

⑦ 梶原健司, 金子昌信, 野邊厚, 津田照久, Hesseの3次曲線に附随する2次元可解カオス系の超離散化, 日本数学会 2009 年秋期総合分科会, 2009年9月24日, 大阪大学

⑧ M. Okado, Application of the perfectness of KR crystals, International workshop on combinatorial and geometric approach to representation theory, September 23 2009, Seoul National University, Korea

⑨ M. Okado, KR crystals and combinatorial R-matrices, Satellite workshop of the Isaac Newton Institute Programme on Discrete Integrable Systems "Geometric aspects of discrete and ultra-discrete integrable systems", March 31 2009, University of Glasgow, Scotland UK

⑩ 梶原健司, 野邊厚, 津田照久, 1次元可解カオス系の超離散化とトポカル幾何, 日本数学会 2008 年秋期総合分科会, 2008年9月24日, 東京工業大学

⑪ M. Okado, Combinatorial structure of Kirillov-Reshetikhin crystals of type $C_n^{(1)}, A_{2n}^{(2)}, D_{n+1}^{(2)}$, RIMS合宿型セミナー「Crystals and Tropical

Combinatorics」、2008年8月30日、関西セミナーハウス

6. 研究組織

(1)研究代表者

尾角 正人 (OKADO MASATO)
大阪大学・大学院基礎工学研究科・准教授
研究者番号:70221843

(2)研究分担者

野邊 厚 (NOBE ATSUSHI)
千葉大学・教育学部・准教授
研究者番号:80397728
(H20, 21に分担者として参画)

(3)研究協力者

坂本 玲峰 (SAKAMOTO REIHO)
東京理科大学・理学部・助教
研究者番号:30528055

中島 俊樹 (NAKASHIMA TOSHIKI)
上智大学・理工学部・教授
研究者番号:60243193

Ghislain Fourier
Universität zu Köln, Assistant

Cédric Lecouvey
Université François Rabelais, Professor

Kailash C. Misra
North Carolina State University, Professor

Anne Schilling
University of California, Davis, Professor

Mark Shimozone
Virginia Tech, Professor