様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　４月　３０日現在

機関番号：３２６４１
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：２００８ ～ ２０１０
課題番号：２０５４００２２
研究課題名（和文）クンマー曲面上の楕円ファイブレーションの研究

研究課題名（英文）Elliptic fibrations on Kummer surfaces

研究代表者
鍬田 政人（KUWATA MASATO）
中央大学・経済学部・教授
研究者番号：００３４３６４０

研究成果の概要（和文）：K3 曲面上には楕円曲面の構造が複数存在し得るが、一つの曲面上の複数の楕円曲面の構造を知ることは数論的性質などの詳しい性質を知る大きな手がかりとなる。本研究の目的は K3 曲面上の楕円曲面の構造を分類し，なるべく具体的に記述することがであったが、種数 2 の曲線のヤコビ多様体から得られるクンマー曲面の場合について大きな進展があった。また, 楕円曲線のモジュライ空間と関連する K3 曲面についても興味ある結果を得た。

研究成果の概要（英文）：On a K3 surface there may exist more than one elliptic fibration. In order to study detailed arithmetic properties, it is very useful to have many elliptic fibrations on a given K3 surface. Our objective is to classify all elliptic fibrations on a given K3 surface and describe them as explicitly as possible. We made a significant progress on this problem in the case of Kummer surfaces associated with curves of genus 2. We also obtained some interesting results on K3 surfaces related to modular elliptic surfaces.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	600,000	180,000	780,000
２００９年度	600,000	180,000	780,000
２０１０年度	400,000	120,000	520,000
年度			
年度			
総　計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：数論幾何学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：楕円曲面、K3 曲面

１．研究開始当初の背景

K3 曲面は代数幾何内だけにとどまらず数理物理学や数論など数学の様々な分野と深く関連する非常に興味深い研究対象である。と

りわけ楕円曲線をファイバーとするファイバー空間の構造（楕円曲面の構造）を持つK3楕円曲面は，楕円曲線の数論と深く結びついた非常に興味深い研究対象である。
K3 曲面の幾何学的性質は Torelli の定理を通じて格子の問題として捉えられ，この方法でひとつの K3 曲面上には楕円ファイブレーションの構造の同型類は有限個しかないことが証明される．ある種の K3 曲面の族については，その曲面上の楕円曲面の構造の同型類を群論的に分類することもできている。しかし，これらの理論を通じて存在が示されるK3 曲面を，定義方程式を用いて具体的に記述することは容易ではなく，その曲面の定義体が何であるかさえわからないことも多い。個々の曲面をさらに詳しく調べるにあたっては楕円曲面の構造を具体的な Weierstrass 方程式の形で記述できることが強く望まれる。 楕円曲面の数論的性質は Weierstrass 方程式を具体的に書き下すことで初めて明らかになることも少なくないからである。

２．研究の目的

K3 曲面 X 上の楕円曲面の構造$\pi : X \to \mathbf{P}^1$を表すには関数体 $k(\mathbf{P}^1)$の生成元 u を関数体$k(X)$の元として式で表わすことと解釈できる。この $k(X)$の元としての u を楕円パラメータと呼ぶ。二つの同種でない楕円曲線の直積$E_1 \times E_2$から得られる Kummer 曲面の場合については楕円曲面の構造の分類は理論的には小木曽氏によりすでに 1980 年代なかば頃に完成されていた。しかし、楕円パラメータの具体的な記述については、本研究を開始する前年に、代表者と塩田氏との共同研究でようやく可能になったばかりであった。そして、この結果をなるべく広い範囲の K3 曲面に拡張することが次の大きな目標となった。本研究では，K3 曲面 Xが与えられ，その関数体 $k(X)$が具体的に記述されているとき，① $k(X)$の中の楕円パラメータすべてを分類し，② ひとつひとつの楕円パラメータを具体的に式で表わし，③ 楕円パラメータから得られる楕円曲面の Weierstrass 方程式を書く，という問題を広い範囲の K3 曲面に対してできるだけ具体的な結果を得ることを目的とする。本研究では可能な限り具体的で詳細な結果を得ることに重点を置いたので、対象とする K3 曲面を主に Kummer 曲面および，それに密接に結びついた K3 曲面に限定した。これらは K3 曲面の族の中では特別な位置を占め，一般性は失われるものの，数論をはじめとした種々の応用の立場からは特に重要である。このような K3 曲面に限定して，より深い考察をすることは意義のあることだと考えられる。

３．研究の方法

（1）種数 2 の曲線 C の Jacobian $J(C)$ から得られる Kummer 曲面 X=Km($J(C)$)の場合，X のどのようなモデルを選び,それをどのような定義方程式で表すかが、まず問題になる。関数体 $k(X)$ を具体的にどのように表わすかを定めなければ,楕円パラメータ u をどのように表すかは決まらず,具体的な目標が定まらないからである。Xは P^5 内の 3 つの 2 次曲面の交わりとして得られるが，古典的な方程式は数論的研究には役にたたないものが多かった。とりわけ，$J(C)$の 2 等分点に由来する Km($J(C)$)に含まれる 32 の直線の所在がはっきりしないことが問題であった。これら 32 の直線と定義方程式との関係をまず明らかにすることが、楕円パラメータの具体的記述には必要不可欠となる。例えば C が $y^2 = x(x-1)(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$ という単純な形に表わされているとしても、この関

係は単純ではないが、これをなるべく一般的な C について行う。

（２）もう一つの重要な K3 曲面として，射影平面の６次曲線で分岐する二重被覆として得られる K3 曲面がある。このうち、６次曲線が６つの直線に分解される場合が Kummer 曲面との関連で特に興味深い。直積型の Kummer 曲面も６つの直線が特別な配置を持ったものと見ることができる。６つの直線が一般の位置にある場合は Kummer 曲面とはならないが，配置をいろいろ変えたとき、いつ Kummer 曲面になるか，楕円曲面の構造はどのように退化するかなど，興味ある問題は尽きない。

また、楕円曲線 E の双対曲線 $\hat{E}$ は９つの特異点を持つ６次曲線となるが，$\hat{E}$ にそって分岐する二重被覆として得られる K3 曲面は E の３等分点と関係する一般化 Kummer 曲面となる。このような K3 曲面についても、Neron-Severi 群を構成する因子についての十分な理解が得られれば、楕円パラメータの構成をし、分類することが可能となる。

４．研究成果

（１）Kummer 曲面 X=Km($J(C)$) は $\mathbf{P}^5$ 内の３つの２次曲面の交わりとして得られるが，これについて，橋本喜一朗氏との共同研究により，$J(C)$ の２等分点に由来する Km($J(C)$) に含まれる 32 の直線がすべて基礎体上で定義される族を具体的に書き表し，Neron-Severi 群を構成する因子についての十分な理解が得られるようになった。本研究に興味を持ち，協力をしてくれていた Abinav Kumar 氏が，Km($J(C)$) 上の楕円曲面で 0-切断をもつものについての分類に成功したことを 2010 年夏に Berlin における研究集会で発表した。氏の方法は，複数の楕円曲面の構造の間に“2-neighbor”という概念を導入し，2-neighbor の連鎖を用いる，Noam Elkies 氏が導入した方法である。氏の結果は 0-切断をもつものに限っていたので，0-切断をもたない楕円曲面の構造で応用上重要なものについて，結果を得つつある。とくに，Kumar 氏の協力によって得られた IV*型の特異ファイバーを２つもつ楕円曲面の構造は，直積型の Kummer 曲面に関する従来の結果と関連して，特に興味深いものである。

（２）種数２の曲線 C の Jacobian $J(C)$ の３等分点に関連した楕円曲面の Mordell-Weil 格子に関して，2009 年 9 月に招聘した M.Schütte 氏の協力を得て，数多くの楕円パラメータを構成することができた。これも，2-neighbor の概念の応用である。この K3 曲面の Picard 数は 19 であり，すべての楕円パラメータを分類することは困難であると考えられていたが，それに向かって第一歩を踏み出せたと考えられる。

（３）2010 年９月に R. Kloosterman 氏を招聘した際、楕円ファイブレーションをもつ３次元多様体についての彼の興味ある研究を紹介してらった。この３次元多様体の Mordell-Weil 群は結び目の理論とも関連があるとのことである。これを応用して，$J(C)$ の３等分点に関連したある楕円曲面の Mordell-Weil 格子の生成元を求めることに成功した。この Mordell-Weil 格子は $J(C)$ の３等分点に引き起こされる Galois 表現とも関連しており、数論的にも非常に興味深いものである。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計０件）
　該当なし

〔学会発表〕（計９件）
<u>M. Kuwata</u>：“Elliptic curve with iso-

morphic 3-torsion structure", Workshop on Number theory, Geometry and Physics at the crossroads, Tsuda College, August, 31, 2010

M. Kuwata: "3-torsion of the Jacobian of a curve of genus 2 and the Mordell-Weil lattice of a rational elliptic surface", Workshop on elliptic fibrations and K3 surfaces, Humboldt-Universität zu Berlin, July 15, 2010.

M. Kuwata: "Elliptic curve with iso-morphic 3-torsion structure", Workshop on arithmetic aspects of elliptic surfaces, Hausdorff Institute, Bonn, March 12, 2010.

〔その他〕
ホームページ等
http://c-faculty.chuo-u.ac.jp/~kuwata/

６．研究組織
(1)研究代表者
鍬田　政人　 (KUWATA MASATO)
中央大学・経済学部・教授
研究者番号：００３４３６４０

(2)研究分担者
該当なし
(3)連携研究者
該当なし