

機関番号：32665

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20540027

研究課題名（和文） 実解析的アイゼンシュタイン級数の複素挙動

研究課題名（英文） Asymptotic behaviors of the real-analytic Eisenstein series

研究代表者

野田 工 (NODA TAKUMI)

日本大学・工学部・准教授

研究者番号：10350034

研究成果の概要（和文）：モジュラー群 $SL(2, \mathbb{Z})$ 上の実解析的アイゼンシュタイン級数 $E(k; s; z)$ に対して (1) 複素変数 s , (2) 上半平面の虚軸方向 $\text{Im}(z)$ に関する漸近展開をそれぞれ異なる手法を用いて与えた。複素変数に関する漸近展開からは条件付きではあるが上半平面の虚軸変数を分離した凸性評価が得られる。また上半平面虚軸方向の漸近展開からは Fourier 級数展開や特殊値の明示公式などの別証明が得られる。

研究成果の概要（英文）：Let $E(k; s; z)$ be the non-holomorphic Eisenstein series with an even weight k attached to the modular group $SL(2, \mathbb{Z})$. Our first main achievement of the present project is to establish the uniform asymptotic expansion of $E(0; s; z)$ respect to $\text{Im}(s)$, which gives the convexity theorem under some conditions. Our second main achievement is to establish its complete asymptotic expansion as $\text{Im}(z)$ to infinity, which gives the another proof of the Fourier series expansion and its applications.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
総計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：解析的整数論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：Eisenstein 級数, 漸近挙動

1. 研究開始当初の背景

(1) **L-関数の特殊値**：ゼータ関数および L 関数の性質のうち特殊値, 特に零点分布は素数分布と関係し多くの研究成果が得られている。しかし Riemann 予想など未解決の部分も多い。零点分布に関して Hilbert と Pólya は独立に、「Riemann ゼータ関数の零点はある種の自己共役作用素の固有値と関係づけられることによりその性質が解明されるであろう」という作業仮説を立てた (1915年頃)。研究代表者はモジュラー群上の symmetric square L-関数に対してその自明でない零点と Hecke 作用素を結びつけ

る明示公式を得た。証明には Sturm による C^∞ -級保型形式の射影と Zagier のアイデアを用い, Eisenstein 級数の増大度の確認, 合流型超幾何関数の解析接続と Laplace-Mellin 変換を実行している。

(2) **Eisenstein 級数の解析的性質**：保型形式においては付随する L-関数を調べる事が重要である。L-関数には Rankin-Selberg method を通じて実解析的 Eisenstein 級数が関係し, L-関数の解析接続, 極の位置, 関数等式, 特殊値などを求める際に大きな役割を果たす。研究代表者の

Eisenstein 級数に関する研究の土台は、志村五郎、水本信一郎の各氏による Siegel Eisenstein 級数の Fourier 級数展開の研究にあるが、一般の不連続群も含めると内外の多くの研究者に関係する。一方、L-関数の零点分布をゼータ関数の漸近挙動から調べる解析数論の方法も有効であって保型 L-関数にも適用されている。実解析的 Eisenstein 級数は、虚二次体上の Dedekind ゼータ関数でもある。保型形式とゼータ関数の性質を併せ持つ Eisenstein 級数の挙動を調べることはゼータ関数(L-関数)の評価を得る有効な方法であると考えられた。本研究課題の実解析的 Eisenstein 級数の挙動は Riemann ゼータ関数の二乗に類似していることを研究代表者は観測している。ゼータ関数の漸近挙動に対する解析的整数論的手法について、研究代表者は内外の複数の専門家に影響を受けている。特に Jutila、本橋洋一の各氏により主導されているゼータ関数の漸近展開および積分平均の一連の研究は、研究代表者にひとつの研究指針を与えている。この立場から、研究代表者は実解析的 Eisenstein 級数の Fourier 級数展開を土台とした、複素変数に関するある種の漸近展開式を得るに至った。証明では Olver によって得られた特殊関数の一様漸近展開を適用した。

(3) **Eisenstein 級数の積分変換** : Eisenstein 級数の上半平面の元に関する漸近展開・積分変換の性質も研究対象となり得る。研究代表者はある条件の下で実解析的 Eisenstein 級数および、その Fourier 係数の Laplace-Mellin 変換の値が零になることを示した ([雑誌論文] ⑥)。用いた手法は次の通りである。Sturm によって構成された、 C^∞ -保型形式から尖点形式のなす空間への射影について、Poincare 級数と $E(k;s;z)$ の Petersson 内積の形で与えられる射影の Fourier 係数は、Laplace-Mellin 変換によって表示される。ここでは Eisenstein 級数の上半平面虚軸方向に関する一様な評価を必要とする。さらに上記積分表示に対し、Mellin-Barnes 型積分を用いる計算手法により、非正則 Eisenstein 級数と尖点形式のなす空間との直交関係が証明される。

(4) **Eisenstein 級数の漸近展開** : Eisenstein 級数の上半平面の元に関する漸近展開について、桂田昌紀氏は Epstein ゼータ関数およびその Laplace-Mellin 変換の完全漸近展開を与えた。この結果を元に研究代表者と桂田昌紀氏は共同研究で、実解析的 Eisenstein 級数の上半平面虚軸方向に関する完全漸近展開の研究を開始した。

2. 研究の目的

(1) Eisenstein 級数の複素挙動 :

実解析的 Eisenstein 級数の複素パラメーターに関する漸近展開式・和公式を与え、Eisenstein 級数の convexity bound の改良とスペクトル理論への応用を与える。

(2) **Eisenstein 級数の漸近展開** : 実解析的 Eisenstein 級数の上半平面虚軸方向に関する完全漸近展開とその応用を与える。

(3) **Eisenstein 級数の多重化** : Mellin 逆変換型(Barnes 型)の積分変換公式を拡張された Eisenstein 級数に対し適用する。目標は(正則および実解析的) Eisenstein 級数の Fourier 級数展開の拡張となるような、多重 Eisenstein 級数の変換公式とその応用を構築することである。多重 Eisenstein 級数の適切な定式化を行い、多重ゼータ関数や多変数保型形式との関係、各種漸近展開の研究の相互関連、特殊値の性質など、教論的な応用を進展させることが目標である。

3. 研究の方法

(1) **Rankin-Selberg の方法** : 保型 L-関数の積分表示を与える Rankin-Selberg の方法は有効である。特殊値、特に零点の計算において Petersson 内積表示を尖点形式のなす空間への射影し Eisenstein 級数の Fourier 係数を用いて明示公式を導いた。

(2) **Bessel 関数の一様漸近展開** : 実解析的 Eisenstein 級数の Fourier 級数展開に Bessel 関数等の特殊関数の漸近展開を適用する。ここで微分方程式の方法から得られた一様漸近展開を用いる。さらに漸近展開において残余項を評価し上からの評価を行った。

(3) **Mellin-Barnes 型の積分変換公式** : Mellin 逆変換型(Barnes 型)の積分変換公式を拡張された Eisenstein 級数に対し適用した。この方法により(正則および実解析的) Eisenstein 級数の Fourier 級数展開の拡張となるような、多重 Eisenstein 級数の変換公式が得られる。また、さらに進んで Barnes 型積分表示を用いて漸近展開を得ることが出来る。

4. 研究成果

(1) **L 関数の零点の明示公式** : Rankin-Selberg L-関数の零点と Hecke 固有値とを結びつける明示公式を報告した ([雑誌論文] ①,③)。これは保型 L-関数の零点と Hecke 固有値とを関連付ける公式である。証明には Sturm による C^∞ -級保型形式の射影と Zagier のアイデアを用い、Eisenstein 級数の増大度の確認、合流型超幾何関数の解析接続と Laplace-Mellin 変換を実行している。

主結果は Hilbert と Pólya の作業仮設(1915年頃)にも符合するものである。特に下記のような新たな知見が得られたことに意義がある。

- ① L-関数の零点と自己共役作用素を結びつける明示公式が得られたこと。
- ② L-関数の Reimann 予想と同値な命題が Hecke 固有値を用いて表示できたこと。
- ③ 保型 L-関数の特殊値(周期)には大きい重さの尖点形式が現れることが志村によって証明されている。しかし我々の零点に関する主結果は小さい重さの尖点形式の Fourier 係数を用いて記述される。このような新しい現象を見出したこと。

(2) **Eisenstein 級数の複素挙動** : 実解析的 Eisenstein 級数の漸近展開式から上半平面の虚軸変数を分離した convexity bound を条件付きで得た ([雑誌論文] ④)。目標は sub-convexity bound の証明であるが、虚軸の変数を分離した凸性評価を証明できたことは研究の正当性を支持するものである。また、評価式の虚軸変数に関する制限も解消されつつあり、保型 L-関数への適用やスペクトル理論などへの応用が期待される。

(3) **Eisenstein 級数の漸近展開** : 実解析的 Eisenstein 級数の上半平面虚軸方向に関する完全漸近展開を与えた ([雑誌論文] ②, ⑤)。証明では Ramanujan 級数と Maass 作用素を用いている。この漸近展開式から固有関数等式, Fourier 級数展開, 極の位置, Kronecker 極限公式, 特殊値の表示, 正則 Eisenstein 級数の Lambert 級数表示などの別証明が得られる。主結果は Maass による先駆的結果(1960年代)にも符合するものである。

(4) **Lipschitz 公式の二重化** : Lipschitz の公式の (正則・非正則の) 二重化に成功した。証明は Poisson の和公式を用いるのではなく、ある種の Mellin 逆変換型(Barnes 型)の積分変換公式を援用するものである。これら結果を用いて、(正則・非正則版) 二重 Eisenstein 級数の変換公式を証明した。これらの変換公式は (正則および実解析的) Eisenstein 級数の Fourier 級数展開のそれぞれ拡張となっている。変換公式は Barnes 型積分表示を持つので積分路のシフトにより漸近展開が可能となる。正則二重 Eisenstein 級数の漸近展開を与え、特殊値の明示公式等を構築した。

- ① Lipschitz の公式について、先ず上半平面のペアに関する二重化を行ったが ([雑誌論文] ⑦)、この場合二重 Eisenstein 級数の変換公式は

正則 Eisenstein 級数の Fourier 級数展開の拡張と考えられる。変換公式は Barnes 型積分表示で与えられるので、さらに進んで漸近公式を導出できる。漸近公式から二重 Eisenstein 級数の特殊値の明示公式、自明な零点等が示される。

- ② 次に、上半平面と下半平面のペアに関する二重化を与えるために twisted Mellin-Barnes formula を導入した。これは超幾何関数における接続公式に Barnes 型積分表示を適用し特殊化した関係式である。ここから Lipschitz 公式の非正則版二重化を行い、非正則版二重 Eisenstein 級数の Fourier 級数型変換公式等を与えることに成功した ([学会発表] ⑩)。この結果は実解析的一変数 Eisenstein 級数の Fourier 級数展開の一般化となっている。現在さらに漸近展開、特殊値の明示公式等の研究が進行中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① T. Noda, An explicit formula for the zeros of the Rankin-Selberg L-function via the projection of C^∞ -modular forms, Kodai Mathematical Journal 31, No.1 (2008), 120-132
- ② M. Katsurada and T. Noda, Differential actions on the asymptotic expansions of non-holomorphic Eisenstein series, International Journal of Number Theory, 6, Vol. 5 (2009), 1061-1088
- ③ T. Noda, An explicit formula for the zeros of the Rankin-Selberg L-function, RIMS Kokyuroku (Analytic Number Theory) 1639 (2009), 164-171.
- ④ T. Noda, Some asymptotic expansions of the Eisenstein series, RIMS Kokyuroku (Automorphic representations, automorphic L-functions and arithmetic) 1659 (2009), 106-115.
- ⑤ M. Katsurada and T. Noda, Actions of Maass' operators on the asymptotic expansions of non-holomorphic Eisenstein series, RIMS Kokyuroku (Analytic Number Theory) 1665 (2009), 80-93.
- ⑥ T. Noda, Laplace-Mellin transform of the non-holomorphic Eisenstein series, RIMS Kokyuroku (Analytic Number

- Theory) 1665 (2009), 94-99.
- ⑦ M. Katsurada and T. Noda, On generalized Lipschitz formulae and applications, Proceedings of Diophantine Analysis and Related Fields 2010, AIP Conference Proceedings 1264, A. I. P. Press, September (2010), 129-138.

[学会発表] (計 11 件)

- ① 野田 工 Eisenstein 級数の積分変換と直交性, 第 16 回整数論サマースクール「保型 L 関数」2008 年 8 月 18 日
- ② 野田 工 Rankin-Selberg L-関数の零点に関する明示公式, 日本数学会 代数学分科会 東京工業大学 2008 年 9 月 27 日
- ③ 野田 工 An explicit formula for the zeros of the Rankin-Selberg L-function, 京都大学数理解析研究所研究集会 解析的整数論の新しい展開 2008 年 10 月 29 日
- ④ 野田 工 Rankin-Selberg L-関数の零点に関する明示公式, 日本大学工学部 学術研究報告会、2008 年 12 月 6 日
- ⑤ 野田 工 Some asymptotic expansions of the Eisenstein series, 京都大学数理解析研究所 研究集会 保型表現と保型 L 関数の数論的研究 2009 年 1 月 21 日
- ⑥ 野田 工, 桂田昌紀 非正則 Eisenstein 級数の漸近展開における微分作用, 日本大学工学部学術研究報告会、2009 年 12 月 5 日
- ⑦ 野田 工, 桂田昌紀 On generalized Lipschitz-type formulae and applications, 研究集会 Diophantine Analysis and Related Fields 成蹊大学理工学部, 2010 年 3 月 5 日
- ⑧ 野田 工, 桂田昌紀 二重 Eisenstein 級数の変換公式と解析接続, 日本数学会 代数学分科会 名古屋大学 2010 年 9 月 25 日
- ⑨ 野田 工 Transformation formulas for a double Eisenstein series and applications, 京都大学数理解析研究所 研究集会 解析数論—複素関数の値の分布と性質を通して 2010 年 10 月 5 日
- ⑩ 野田 工, 桂田昌紀 二重アイゼンシュタイン級数の変換公式と応用, 日本大学工学部学術研究報告会、2010 年 12 月 4 日
- ⑪ 野田 工 On generalized Lipschitz-type formulae and applications II, 研究集会 Diophantine Analysis and Related Fields 成蹊大学理工学部

2011 年 3 月 4 日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

野田 工 (NODA TAKUMI)
日本大学・工学部・准教授
研究者番号：10350034