

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5 月 15 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2011

課題番号：20540029

研究課題名（和文） p 進等質空間の球関数とその応用研究課題名（英文） Spherical functions on p -adic homogeneous spaces and those applications

研究代表者

広中 由美子（HIRONAKA YUMIKO）

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授

研究者番号：10153652

研究成果の概要（和文）：この研究は、数論的に興味のある p 進等質空間を球関数を用いて解析し、数論的応用を図ることを目的とした。そのために、(1)等質空間上の典型的な球関数を表す式をなるべく適用範囲が広いように定式化すること、(2)具体的な空間について(1)の表示式から明示式を求め、それを基に空間の調和解析的研究をすること、(3)数論的として対称形式やエルミート形式の空間について、表現の局所密度など数論的量を求めることを目標として行った。もっとも重要な成果は、不分岐ユニタリ・エルミート行列の空間上の球関数を明示的にとらえ、それを用いてこの空間の解析できたことである。

研究成果の概要（英文）：We intend to investigate certain p -adic homogeneous spaces together with spherical functions and have number theoretic applications. We have approached this purpose in the following way: 1) to formulate expression formulas of spherical functions which can be widely applied; 2) to formulate explicit formulas of spherical functions for concrete examples and analyze the spaces; 3) to obtain number theoretic interesting quantities for the spaces of symmetric forms and hermitian forms. The most important result is to complete the theory of spherical functions on the space of unramified unitary hermitian matrices.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論

1. 研究開始当初の背景

Hecke 環の作用に関して同時固有関数となる等質空間上の関数を、球関数とよぶ。これは、等質空間上の調和解析を研究する上で基本的対象である。実数体または複素数体上の帯球関数の理論は、Harish Chandra が半

単純リー群、reductive リー群について構成し、大島利雄らにより、対称空間に拡張された。一方、 p 進 reductive 群の帯球関数の理論は、F.I.Mautner、佐武一郎、I.G.Macdonald 等により、1960年代以降展開された。群上の帯球関数の発展である等質

空間の球関数は興味深い研究対象で、群の作用と共にその空間を解析する基本的道具となる。それらは、特別なモデルの球ベクトルや Shalika 関数、あるいは Whittaker-Shintani 関数として研究されてきて、保型形式の数論や表現論と密接な関係をもつ。作用する群や作用している空間が有理数体上定義されているとき、球関数は、大局的な対象 Rankin-Selberg 積や Eisenstein 級数の局所因子として現れることが知られている。

さて、 p -進球関数を基とした調和解析を、等質空間上で展開したのは、研究代表者および連携研究者 佐藤文広による交代形式の空間が群上ではない先駆例であるといつて良からう。

そもそも、球関数の明示公式を求めることはもっとも基本的な問題の一つである。群の場合には I.G. Macdonald と、W.Casselman による表現論的再定式化で解決している。後者を発展させた形で、等質空間の球関数の表示式が得られ、いくつかの結果が出ている。

2. 研究の目的

前項で記した理論の発展段階の認識に基づいて、本研究では、弱球等質空間の p -進体上の研究に主眼をおき、次のような目的を掲げた。

(1) X 上の典型的な球関数を表す式をなるべく適用範囲が広い場合に定式化すること、

(2) 具体的に興味深い群や空間について、球関数の明示式を求め、それを基に対象としている空間の調和解析的研究を行うこと、

(3) 数論的に重要な半双線形式などの空間の内、特に対称形式の空間に対して、従来得られている結果を発展させ、表現の局所密度などの数論的量を求めること

3. 研究の方法

研究代表者が中心となって研究を進めた。その際に、1) 2) については、概均質ベクトル空間の理論からの検討が必要で、連携研究者の佐藤文広氏との議論が役立っている。また、出てきた特殊な対称多項式に関しては q -解析からの見方も必要で連携研究者の鎌野健氏と考察した。

当初鎌野氏は東京在住であったので、2011 年に加わった連携研究者岡本亮彦氏と共に、早稲田大学で西早稲田数論セミナーを開催し、より多くの研究協力者との議論の場を設けた。また、2008 年度から、数論関係の女性研究者の研究集会(「数論女性の集まり」WINJ1

-- WINJ4)を早稲田大学で開催し、若手女性研究者への後押しもすると同時に、数論の中の広い分野の研究者へのこの研究テーマを広める一助ともしている。

海外研究協力者の Siegfried Boecherer 氏、Hubert Rubenthaler 氏とも、来日していただいたり、こちらが出張したりして、直接議論する場を持ち研究を進展させた。

早稲田大学内部では、同じ分野の研究者が少ないため、研究集会に出張し、そこで議論や資料収集をすること、また、研究者に来ていただく機会として早稲田大学で研究集会を開催することは大切で、それらを通じて研究活動を行った。

4. 研究成果

目的で述べた (1) については、論文 ⑤ にまとめた。極小放物部分群に関する X 上の相対不変式の Poisson 変換、すなわち複素べきを極大コンパクト部分群の作用に関して平均を取る形で典型的な球関数が得られ、この関数等式と群 G のデータを用いて、球関数が記述できる。極小放物部分群の階数より少ない個数の独立な相対不変式しかない場合にも適用できるよう以前の結果を改良した。

例えば、以前、別の方法で連携研究者の佐藤文広氏と求めていた交代形式の球関数の明示式を、今回の定式化に乗せて得ることができる。

目的の (2) (3) に関して、一般線形群以外の群に関する等質空間として、 $U(2n)/U(n) \times U(n)$ と同型な空間を、 p -進体 k 上の不分岐非退化エルミート形式 T を表現するファイバー空間 X_T としてユニタリ群の等質空間 (この場合は対称空間である) $U(2n)/U(n) \times U(n)$ と同型な空間として実現し、 X_T 上の球関数を考察した。

関数等式や極や零点の位置に関しては、不分岐エルミート形式の空間の球関数も用いることにより、良い結果が得られた。それを用いると、各 T について X_T の特別な点における球関数の明示式が得られる。

さらに T, S が k 上同値であれば、 X_T と X_S は k 上同型で、それぞれに対する球関数も簡単な関係で結ばれるので、固定した T についての X_T 上の球関数のほとんどの点での明示式が分かる。従って、例えば X_T 上の Schwartz 関数の空間からの球 Fourier 変換像は決定できる。

また、この球関数の特殊値と行列環のゼータ関数を用いて、エルミート Siegel 特異級数 $b_\pi(T, t)$ ($t \in \mathbb{C}$) を書き表すことができる。従って、 X_T 上の球関数の性質から、こちらの関数論的な性質や関

数等式が具体的に分かる．これは数論的応用の例である．

$SO(n)$ あるいは $O(n)$ の等質空間上の球関数と Siegel 特異級数については以前、連携研究者である佐藤文広氏との共同研究で考察した．この場合は、球関数についての結果は、Siegel 特異級数についての関数等式の考察に不十分であったが、今回の場合には、球関数を十分に解析することができて、それから特異級数の性質を導くことが出来た．これは論文①にまとめた．

しかし、この空間 XT は商集合として実現するため、わかりにくいこともある．例えば、カルタン分解はよく分からなかった．そこで、直接 ユニタリ・エルミート行列のなす空間 XS として、 $U(2n)/U(n) \times U(n)$ の別の実現を考察し始め、こちらの XS 上の球関数を考察すると、極めてよく似た形で得られることも分かり、これについては、2012年1月に数理解研の研究集会で口頭発表した．剰余体の標数が奇数の場合には、球関数を用いた XS 上の解析はほぼ完結し、以前の空間 XT との関係も分かった．

しかし、剰余体の標数が偶数 (dyadic case) の場合には、カルタン分解で、新しい型のものが現れるなど、様相は複雑で引き続き研究していく必要がある．

また、目的の(3)に関しては、連携研究者 佐藤文広氏と海外研究協力者 Siegfried Boecherer 氏との共同研究をし、論文 ⑨にまとめた．対称形式の SS から TS を表現する局所密度 $\alpha_p(S, T)$ を TS の関数とみることで、 SS が hyperbolic 型の行列で動かしたときの一次独立性を考察した．局所密度の積が genus theta 級数のフーリエ変換の主要項として現れることから、これらの大局的な genus theta 級数の一次独立性を導くことができ、平方因子のないレベルでは、これらで Siegel Eisenstein 級数の空間が尽くされること、しかし、一般のレベルではあるかに小さい空間しか張らないことなどを示した．

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 13 件)

- ① Y.Hironaka, Spherical functions on $U(2n)/U(n) \times U(n)$ and hermitian Siegel series, Series on Number Theory and Its Applications vol.7(2011), 120 - 159. 査読あり
- ② F. Sato and T. Kogiso, Construction of non-prehomogeneous polynomials with

local functional equations from representations of Clifford algebras, Tambov University Report, vol.16 (2011), 1744--1750. 査読なし

- ③ K.Kamano, On a characterization of a q -analogue of the gamma function, International Journal of Applied Mathematics & Statistics vol.21 (2011), 110-117. 査読あり
- ④ A.Okamoto, On expressions of theta series by eta-products, Tokyo Journal of Mathematics vol.34 (2011), 319-326. 査読あり
- ⑤ Y.Hironaka, Spherical functions on p -adic homogeneous spaces, MSJ memoirs, vol.21(2010), 50 - 72. 査読あり
- ⑥ K.Kamano, Multiple p -adic logarithmic gamma functions and their characterization theorem, Acta Arithmetica vol.145(2010), 109 - 122. 査読あり
- ⑦ Y.Hironaka, Spherical functions on $U(2n)/U(n) \times U(n)$ and hermitian Siegel series, 京都大学数理解析研究所講究録, 1722 巻, 126 - 145. 査読なし
- ⑧ K.Kamano, Sums of products of hypergeometric Bernoulli numbers, Journal of Number Theory vol.130(2010), 2259 -2271. 査読あり
- ⑨ S.Boecherer, Y.Hironaka and F.Sato, Linear independence of local densities of quadratic forms and its application to the theory of Siegel modular forms, Contemporary Math. AMS, vol.493(2009), 51 - 82. 査読あり

[学会発表] (計 17 件)

- ① Y.Hironaka, Spherical functions on the space of p -adic unitary hermitian forms, RIMS 研究集会「保型形式と保型的 L 関数の研究」京都大学数理解析研究所, 2012.1.18.
- ② Y.Hironaka, Spherical functions and Siegel singular series for p -adic case, "Explicit theory of automorphic forms, applications and computations", Conference at Centre International de Rencontres Mathématiques (Luminy, France, 2011.5.13.
- ③ Y.Hironaka, Spherical functions on certain p -adic homogeneous spaces, Ueda Memorial Conference on Automorphic Forms, 2011.1.26, 奈良女子大学.

- ④ Y.Hironaka, $U(H_n)/U(T) \times U(T)$ 上の球関数について,
RIMS 研究集会「等質空間と非可換調和解析」
京都大学数理解析研究所, 2010. 6. 16.
- ⑤ 鎌野健, p -進多重ログガンマ関数とその一意性定理,
第 3 回ゼータ値. ゼータ関数見にセミナー,
2010.3.5, 九州大学.
- ⑥ 佐藤文広, 概均質ベクトル空間の保型超関数とゼータ関数,
RIMS 研究集会「保型形式・保型表現およびそれに伴う L 関数と周期の研究」, 2010.1.19,
東京大学.
- ⑦ Y.Hironaka, Spherical functions and (hermitian) Siegel series, Arithmetic of Quadratic Forms of the KMS-AMS Joint Meeting, 2009. 12. 16, Ewha Womans University, Seoul, Korea.
- ⑩ Y.Hironaka, p -adic Spherical functions and singular series, Geometry and Analysis of Automorphic Forms of Several Variables, 2009. 9. 14, 東京大学.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

広中 由美子 (HIRONAKA YUMIKO)

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授
研究者番号 : 10153652

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

佐藤文広 (SATO FUMIHIRO)

立教大学・理学部・教授

研究者番号 : 20120884

鎌野健 (KAMANO KEN)

大阪工業大学・工学部・特任講師

研究者番号 : 50409611

岡本亮彦 (OKAMOTO AKIHIKO)

早稲田大学・教育総合科学学術院・助手

研究者番号 : 50608825