

機関番号：32714

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540030

研究課題名 (和文) 数体上の線型不等式系の同値類がなす淡中圏の構造の研究

研究課題名 (英文) Study of the structure of a tannakian category formed by equivalence classes of systems of linear inequalities over a number field

研究代表者

藤森 雅巳 (FUJIMORI MASAMI)

神奈川工科大学・基礎・教養教育センター・准教授

研究者番号：20312093

研究成果の概要 (和文) : 数の有理近似に関する一性質を記述する線型不等式系の同値類全体は適当な群の表現全体と自然に同一視されることが知られていますが, その巨大な群の全体像は未だ分かっていません.

この研究では, 有名な Roth の不等式に対応する古典的な線型不等式系がどのような代数群を経由して問題の巨大な群の表現とみなせるのかを解明しました. また, 任意の簡約群は問題の巨大な群の商として自然に現れることも明らかにしました.

研究成果の概要 (英文) : It is known that the equivalence classes of systems of linear inequalities which describe a rational approximation property of numbers are naturally identified with the representations of some group, but the whole body of the huge group is not clear yet.

In this study, we have revealed via what algebraic group a classical system of linear inequalities which corresponds to the famous Roth inequality is considered a representation of the said huge group. We have also shown that arbitrary reductive groups appear in a natural manner as quotients of the above-mentioned huge group.

交付決定額

(金額単位: 円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	600,000	180,000	780,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	1,800,000	540,000	2,340,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数学、数論、ディオファントス近似、数体、線型不等式、淡中圏、代数群、表現

1. 研究開始当初の背景

一般 Roth 系と呼ばれる数体上の線型不等式系について自然な同値類を考える (以下の4. 研究成果(1)にて少し詳しく説明します) と,

その同値類全体は淡中圏をなすことが知られています. 淡中圏とは, 適当なアフィン群の有限次元線型表現全体のなす圏と同一視出来る圏のことで, 圏に付随する情報だけから元の群を復元することが出来ます. さて

問題の淡中圏については、それを定めるアファイン群の巨大な全体像が未だ知られていません。

研究課題の申請時において本研究の研究者は、有限個の部分トーラスの生成する部分群が稠密となる数体上任意の代数群、例えばトーラスそのものや簡約群、は、非等方的であるかないかに拘らずに全て、問題の淡中圏の定める群の商として何らかの形で現れること、言い換えますと、その様な代数群の有限次元線型表現全体のなす淡中圏は問題の巨大な淡中圏の充満部分圏として一意的ではありませんがとにかく現れること、を証明していました。

2. 研究の目的

(1) 一般 Roth 系の同値類全体がなす淡中圏の定めるアファイン群の商の候補として、自然に数体上の有限群が考えられます。本研究課題の申請時において、これらの群が問題の淡中圏の定める群の商として現れるかどうかを決定することを目的としました。

(2) 一般 Roth 系の同値類全体がなす淡中圏の定めるアファイン群の商として、例えば数体上の簡約群は一意的ではなく様々な現れ方をします。本研究課題の申請時において、それら様々な現れ方を全て調べて整理し、自然な形式にまとめることを目的としました。

(3) 一般 Roth 系の同値類は、その一般 Roth 系が定めるフィルタ付き線型空間として具現される為、一般 Roth 系の同値類全体がなす淡中圏に相当する淡中圏を任意標数の任意の体上で考えることが出来ます。本研究課題の申請時において、この任意標数の任意の体上で考えた淡中圏について、数体上で得られる成果および既に得られている結果を任意標数の任意の体上へ拡張することを目的としました。

3. 研究の方法

(1) 文献の調査。

(2) セミナーや研究集会・サマースクール等への参加。

(3) 他の研究者からの情報収集。

(4) 得られた知識や情報の分析・省察と計算および統合。

4. 研究成果

(1) 有名な Roth の不等式の整数解の有限性は、それに適切に対応した線型不等式系の整数解の有限性から得られますが、その様に整数解を有限個しか持たない或る型の線型不等式系は一般 Roth 系と呼ばれます。座標変換で移り合う一般 Roth 系を同一視して出来る同値類を考えると、一般 Roth 系の同値類全体には自然に淡中圏(数学者・淡中忠郎(1908—1986)に由来)という構造が入り、一般 Roth 系の同値類全体はその構造により適当なアファイン群の有限次元線型表現全体と同等とみなせます。この意味で特に、有名な Roth の不等式に対応する線型不等式系はアファイン群の表現空間(の基底)とみなせますが、更にアファイン群の有限次元線型表現は代数群を商として経由しますから、有名な Roth の不等式に対応する線型不等式系は何か或る代数群の表現空間(の基底)とみなせます。

Roth の不等式に対応する線型不等式系が一体どの様な代数群の表現空間(の基底)とみなせるのかは、一般 Roth 系の同値類全体が淡中圏をなすと認識されて以来の中心的問題の一つでしたが、本研究ではそれを完全に解決しました。具体的に述べますと、Roth の不等式に現れる代数的数の基礎体上の拡大次数が 2 より大きいときには常に次数 2 の特殊線型群、拡大次数が丁度 2 のときには、その代数的数の生成する 2 次体のノルム 1 の元が定める乗法群が有理点のなす群に同型という条件で特徴付けられる 1 次元非等方的トーラス、になることを証明しました。

一般 Roth 系と呼ばれる線型不等式系個々の内の一つを具体的な代数群の表現空間(の基底)として完全に捉えたという点で、この成果は非常にインパクトがあり一つの大きな前進であると思いますが、他方、Roth の不等式に対応する線型不等式系が上に述べた代数群の表現空間(の基底)とみなせることの意味するところは未だ明らかではなく、新たな今後の研究課題になりました。

(2) (1) に説明した通り、一般 Roth 系の同値類全体は淡中圏をなし、従って適当なアファイン群の有限次元線型表現全体と同等とみなせます。このアファイン群は連結か

否か、即ちこのアフィン群の商として有限群が現れるか否か、更に別の言い方をしますと、有限群の有限次元線型表現全体が一般 Roth 系の同値類全体のなす淡中圏の一部(充満部分圏)として現れるか否かという問題が自然に考えられます。

本研究課題の申請時における当初の重点的研究目的としてこの問題を掲げましたが、これに関しまして、基礎体上分裂する乗法的有限群は決して現れないということが分かりました。この成果は一般 Roth 系の同値類全体のなす淡中圏が定めるアフィン群の連結性に関する初めての結果として、インパクトがあると思います。また、その他の型の有限群に対しましては、おおよその見当を付けることが出来ました。今後も研究を継続して結論を導きたいと思います。

(3) 一般 Roth 系と呼ばれる線型不等式系を代数群の有限次元線型表現(の基底)として実現するには、関手と呼ばれる、通常の間数概念を拡張した様な対応を使います。本研究課題の申請時において、代数群の有限次元線型表現に線型不等式系の同値類を対応させる関手の自然な定義が不明であった為、その様な関手の自然な定義を研究目的の一つに掲げていました。

これに関しまして、代数群の有限次元線型表現に線型不等式系の同値類を対応させる関手の或る意味自然な定義に到りましたが、文献を調査するうちに、既に 1970 年代前半に線型不等式系より一般の対象について同様な場面で同様の関手の自然な定義が本質的に与えられていて、本研究で独立に得られた関手の定義はその 1970 年代前半の定義を発展させたものに他ならないことが判明しました。

結果的に本質的には既に知られていることを本研究課題へ発展的に適用した形となりましたが、線型不等式系と代数群の有限次元線型表現という一見直接結び付く様には思われたい対象の間の或る意味で自然な関手の存在を明確にした点と、この様な関手を明確にすることは一般 Roth 系の同値類全体のなす淡中圏の定めるアフィン群を素性のよく分かっている代数群の射影極限として記述する際に絶対に必要であるという点で、この成果には意義があります。

(4) 座標変換で移り合う一般 Roth 系の同一視は、その一般 Roth 系が定めるフィルタ付き線型空間として具現されます。つまり、

フィルタ付き線型空間であって或る条件を充たすもの全体が一般 Roth 系の同値類のなす淡中圏の正体です。線型不等式系に替わってフィルタ付き線型空間が考察の対象になると、フィルタ付き線型空間の係数体を最初の線型不等式系の係数とは無関係に考え直すことが出来ます。

本研究課題の申請時における研究目的として、一般 Roth 系について得られる結論をすべて任意標数の任意の体上へ拡張することを掲げていました。これに関しまして、上に述べた成果および申請時に既に得られていた結果はほとんど全て、任意標数の任意の体上でも成立することを証明しました。

例外は、正標数の体上で Roth の不等式に対応する線型不等式系の係数の基礎体上の拡大次数が 2 より大きい場合に、線型不等式系がどのような代数群の表現空間(の基底)とみなせるかが完全には決定出来ていない点です。この場合、標数零のとき同様、ほとんど全て次数 2 の特殊線型群になることは分かりませんが、Roth の不等式に現れる代数的数の基礎体上生成する Galois 拡大の Galois 群が $(2, 2, \dots)$ 型可換群のときには、次数 2 の特殊線型群の部分群として或る意味で記述が得られている状態に留まっています。標数零のときには、Lie 群と Lie 環の一対一対応という標数零のときに特有な現象を利用して証明を完成した為、正標数のときには、何か別の方法が必要です。

任意標数の任意の体上で上に列挙したことがほとんど全て成立するという事は、それ自体大変興味深いと思いますが、有限体あるいは局所体上で考えた、一般 Roth 系の同値類全体のなす淡中圏に相当するフィルタ付き線型空間のなす淡中圏は Rapoport の周期領域の理論に現れ、その意味でも本研究の成果はいずれも注目すべき価値があると思います。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[学会発表] (計 2 件)

- ① 藤森雅巳、The algebraic groups leading to the Roth inequalities、Analytic Number Theory - through Value Distribution and other Properties of Analytic Functions、2010年10月6日、京都大学数理解析研究所

- ② 藤森雅巳、On algebraic groups attached to systems of linear inequalities over number fields、Tambara Workshop 2009: Holomorphic Mappings and Related Diophantine Approximation、2009年10月10日、玉原国際セミナーハウス (群馬県)

[その他]

ホームページ等

<http://researchmap.jp/fujimori>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤森 雅巳 (FUJIMORI MASAMI)

神奈川工科大学・基礎・教養教育センター・准教授

研究者番号：20312093

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし