

機関番号：34419

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540033

研究課題名 (和文) 概均質ベクトル空間のゼータ関数と多重ゼータ値の研究

研究課題名 (英文) A study of zeta functions of prehomogeneous vector spaces and multiple zeta values

研究代表者

大野 泰生 (OHNO YASUO)

近畿大学・理工学部・教授

研究者番号：70330230

研究成果の概要 (和文)：

概均質ベクトル空間については、2元3次形式の空間における、有理整数環に関するすべての格子に付随するゼータ関数に対して、それらの間に成り立つ代数的関係式の解明を完成した。この事実はこの対象の判別式が正の部分と負の部分の間に未解明な対称性が存在することを示唆しており興味深い。多重ゼータ値環については、多重ゼータ値と等号付き多重ゼータ値の関係の解明し、ホフマンによる予想基底を用いて正の整数点におけるリーマンゼータ値を記述した。また、重さ・深さ・ $i$ -高さを固定した等号付き多重ゼータ値の和について、一般超幾何関数を用いた母関数表示の公式を与えた。また、高さ1の等号付き多重ゼータ値のある種の双対公式も証明した。さらに、多重ゼータ値の新たな和公式の一般化など多数の成果を得た。これらの結果は多重ゼータ値の張る有理数体上の環の構造解明のため重要である。

研究成果の概要 (英文)：

We figured out algebraic relations among the zeta functions of the prehomogeneous vector space associated with binary cubic forms with all lattices over the integer ring. These relations suggest the existence of beautiful symmetries of these objects, which are not yet known. We also clarified the relation among multiple zeta values and multiple zeta-star values, and figured out the explicit formula of Riemann zeta values of positive integral points in terms of multiple zeta-star analogue of Michael Hoffman's conjectural basis. Moreover we obtain a generating function representation of totals of multiple zeta-star values of fixed weight, depth and  $i$ -heights in terms of generalized hypergeometric functions. We also gave a kind of duality formula for multiple zeta-star values of height one. Farther we obtained another generalization of sum formula for multiple zeta values and many related results. These results are important for understanding the structure of  $\mathbb{Q}$ -algebra spanned by all multiple zeta values.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,000,000	600,000	2,600,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論

## 1. 研究開始当初の背景

概均質ベクトル空間である 2 元 3 次形式の空間に付随するゼータ関数として、新谷氏によって定義された 4 つのディリクレ級数の間に、現時点での概均質ベクトル空間の一般論からは汲み取ることのできていない、簡明な関係式が存在し、本質的にディリクレ級数は 2 つに簡約されることが、研究代表者（大野）による予想とそれに対する中川氏の証明によって確認されていた。この未解明の対称性を詳しく調べ、現象を解明し、類似の現象が様々な空間やゼータ関数に対して起こる可能性をも追求することが重要な研究課題であった。中川氏は 3 元 2 次形式のペアの空間において類似の簡約と対称性の可能性を追求し、部分的ではあるが期待に応える現象を解明しつつあった。研究代表者は谷口氏および連携研究者（若槻氏）とともに、2 元 3 次形式の空間における有理整数環に付随する格子のうち、新谷氏の扱っていない 4 格子について、概均質ベクトル空間のゼータ関数の一般論により定義されるディリクレ級数を考え、その間に成立する非自明かつ簡明な関係を解明したもの、残る 4 格子については極めて難解な現象に突き当たり、同様の考察は不可能に近い困難な状況にあった。この現象解明に継続的に取り組む必要があった。多重ゼータ値環については、寺杉氏とゴンチャロフ氏によって各重さにおける多重ゼータ値の張る有理数体上のベクトル空間の次元の上限が与えられたが、具体的な構造たとえば各重さの空間における線形関係式の構造的な理解や、標準的な基底の取り方などは未解明の状態であった。研究代表者がマックスプランク研究所滞在時にズディリン氏との共同研究で提出した 2-1 公式については部分的な証明が得られたものの、全体的な解釈への途上であった。多重ゼータ値を扱う上でオイラーが定義した等号付き多重ゼータ値を並行して扱う必要性について研究代表者は指摘を続けてきたが、この等号付き多重ゼータ値についても、多重ゼータ値の場合と類似した双対的性質の存在が金子氏によって、ホフマンによる有限多重ゼータ値の研究結果と金子氏自身による多重ベルヌーイ数の研究結果に基づいて予想された。また、等号付き多重ゼータ値について、重さと深さと高さの 3 パラメータを固定した場合の総和について、青木氏と昆布氏と研究代表者の共同研究により、超幾何関数  $3F_2$  による母関数の記述が得られていた。

## 2. 研究の目的

概均質ベクトル空間の一般論が適用されて新たなゼータ関数が定義された中で、最も古い対象である 2 元 3 次形式の空間は、具体的

な計算の挙行できる空間でありながらも未解明の現象が多く、その現象の簡明さや美しさとは裏腹に、現象解析の研究は困難を極める。この空間の簡明な現象の根拠を詳らかにし、構造解明や他の空間との関連付けを行うことで、ゼータ関数の既存の関数による書き下し、引いては保型形式の空間の情報を引き出すことが目的である。判別式の正負の異なる斉次多項式の間に見えぬ簡明な対称関係の構造を明確に研究解明することが重要である。多重ゼータ値のなす有理数体上の環は、基本群のガロア表現、超幾何関数、結び目の量子不変量、量子物理学など様々な分野に現れる重要な対象と関係しており、その環構造の解明が重要な課題である。とりわけ、具体的な関係式族の構造的な理解は、各重さごとのベクトル空間の生成構造を解明するほか、表象には顕れない重要な母関数の発見と解明をもたらす。また、各重さのベクトル空間における標準的な基底の解明は、空間の構造の記述を容易にするだけでなく、予想されている次数付き環としての構造の解明においても有効となるため急務である。

## 3. 研究の方法

2 元 3 次形式の空間はアイゼンシュタイン氏が類数計算を行い、ダベンポート氏やモーデル氏が簡約理論や密度計算を行っていたほどに具体的な計算の挙行に適している。研究代表者自身も、新谷によって定義されたディリクレ級数の簡約についての研究において極めて具体的にこの空間の計算を行った経験をもつ。具体的に 2 元 3 次形式の代表元を扱い、格子に付随する類の詳細な解析を行った。また、この空間に作用する群を従来の特殊線形群だけでなく、その部分群に絞ることで類に起こる現象を解析し詳細な情報を得た。多重ゼータ値環に対しては、ホフマンによって予想されている基底（ $\{2, 3\}$  基底）の解明に具体的な計算を用いて取り組むと同時に、等号付き多重ゼータ値に対して同様の基底の存在の可能性を模索し、この基底によるリーマンゼータ値の記述を試みた。等号付き多重ゼータ値に対する金子氏による双対関係式の予想には、研究代表者自身による和公式の一般化の定理と、荒川-金子ゼータ関数の特殊値を用いることが有効であると判断し取り組んだ。また、等号付き多重ゼータ値を、重さ、深さ、一般化された高さによって分類した場合の、各カテゴリーにおける総和の母関数について、多重ゼータ値での李氏による大野-ザギエ公式の一般化の研究を手本として一般化された高さを定義し、母関数のなす微分方程式を構成して一般化超幾何関数で記述することに取り組んだ。

#### 4. 研究成果

2元3次形式の空間における、残る4格子について、付随するディリクレ級数の間の非自明かつ具体的な関係式を谷口氏との共同研究において解明し証明した。この関係式はこれまでの6つの格子の場合とは本質的に異なる不可解な形をしており、一般論や抽象的取扱いではおそらく想像することのできない形の関係式である。具体的に2元3次形式のレベルで類を解析したことによって、関係式のねじれ具合に繋がる情報が解明され、この情報と具体的な類数の数列の初期情報とを合わせることで、予想関係式の定式化を行うことができた。さらに類の代表元同士の合同関係と生成関係の解析と部分群作用による類の挙動の分析により証明を完結することができた。整数環に付随する格子の完全な分類は連携研究者(若槻氏)によって行われ、今回の4格子を含む全10格子で2元3次形式の空間の有理整数環に付随する格子は尽くされることが解明された。今回の4格子に付随するディリクレ級数の間の関係式は、式の形は不可解であるものの、個数としては従来の6格子のときと同様で、本質的なディリクレ級数の個数を半分に簡約するものとなっており、この格子についても判別式が正の部分と負の部分との間に未解明の対称性が存在していることを示唆しており期待に反せず満足のいく研究結果であるといえる。また、多重ゼータ値においては、金子氏による高さ1における等号付き多重ゼータ値の双対関係式を証明した。この関係式は研究代表者が以前与えた関係式を用いて、荒川-金子のゼータ関数を用いた記述に変換され、このゼータ関数の別の表記を用いることにより、研究代表者が博士論文で得た、和公式の一般化に帰着された。この研究により、一般の高さでの双対関係式の存在が予想でき、数値実験によって高さ14以下で確認できたため予想として高さ1の場合の証明とともに公表した。井原氏、梶川氏、奥田氏との共同研究においては、多重ゼータ値と等号付き多重ゼータ値のおのおのに付随する2変数非可換多項式環の間に写像を定義し、この写像を詳しく調べることにより、ホフマン氏による導分関係式の書き換えを行った。そのうえで、等号付き多重ゼータ値において、ホフマン氏の予想基底の類似を定義し、この新しい予想基底の正当性を数値実験により確認するとともに、この基底によってリーマンゼータ値の記述を完成した。従来の、多重ゼータ値におけるホフマン予想基底では、リーマンゼータ関数の奇数点における値の記述は完成しておらず、この表記の完成とその簡明さは内外の専門家に驚きをもって受け止められた。ズディリン氏との共同研究による2-1公式の一般的解釈については、オースト

ラリア・ニューカッスル大学を訪問してズディリン氏との研究を継続し、公式の与える表記が多重ゼータ値と等号付き多重ゼータ値の平均と解釈できることを解明するとともに、重みつき和公式の一般化について複数の成果を得た。さらにこの共同研究において、巡回和公式の類似についても複数の成果を得た。また、等号付き多重ゼータ値の重さ、深さ、 $i$ -高さを固定した総和の母関数の研究では、青木氏、若林氏との共同研究で、一般化超幾何関数を用いた書き下しに成功し、この記述を特殊化することにより、既存の複数の結果を再証明することができることも示した。

これらの成果について、日本数学会・代数学分科会の特別講演、韓国・浦項工科大学数学研究所(POSTECH)、オーストラリア・ニューカッスル大学CARMA研究所などで成果の講演を行うとともに、*American Journal of Mathematics*, *Journal of Algebra*, *Manuscripta Mathematicae*, *International Journal of Number Theory*, *Communications in Number Theory and Physics*, *Mathematics of Computations*, *Proceedings of American Mathematical Society*等の海外学術雑誌に論文掲載し、また成果の一部は現在学術雑誌に投稿中である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

- ① Kentaro Ihara, Jun Kajikawa, Yasuo Ohno, Jun-ichi Okuda, Multiple zeta values vs. Multiple zeta-star values, *J. Algebra* 332 (2011), 187-208, 査読有.
- ② Takashi Aoki, Yasuo Ohno, Noriko Wakabayashi, On generating functions of multiple zeta values and generalized hypergeometric functions, *Manuscripta Math.* 134 (2011), 139-155, 査読有.
- ③ Masanobu Kaneko, Yasuo Ohno, On a kind of duality of multiple zeta-star values, *Int. J. Number Theory* 6 (2010), 1927-1932, 査読有.
- ④ Yasuo Ohno, Takashi Taniguchi, Satoshi Wakatsuki, Relations among Dirichlet series whose coefficients are class numbers of binary cubic forms, *Amer. J. Math.* 131 (2009), 1525-1541, 査読有.
- ⑤ Yasuo Ohno, Wadim Zudilin, Zeta stars, *Commun. Number Theory Phys.* 2 (2008), 325-347, 査読有.
- ⑥ Takashi Aoki, Yasuhiro Kombu, Yasuo Ohno, A generating function for sums of

multiple zeta values and its applications, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 387-395, 査読有.

⑦ Takeshi Goto, Yasuo Ohno, Odd perfect numbers have a prime factor exceeding  $10^8$ , Math. Comp. 77 (2008), 1859-1868, 査読有.

[学会発表] (計 13 件)

① 佐々木義卓, 大野泰生, Poly-Euler 数の諸性質について, 日本数学会・年会・代数学分科会 (震災により中止されるも学会成立), 2011 年 3 月 20 日, 早稲田大学.

② 大野泰生, Multiple zeta-star values and numerical experimentation, 第 4 回多重ゼータ研究集会, 2011 年 1 月 8 日, 九州大学.

③ 大野泰生, MZV vs. MZSV, WORKSHOP ON NUMBER THEORY AND ZETA VALUES, 2010 年 10 月 20 日, Newcastle 大学・オーストラリア.

④ 大野泰生, 多重ゼータ値の間の様々な関係式, 日本数学会・秋季総合分科会・代数学分科会・特別講演, 2010 年 9 月 25 日, 名古屋大学.

⑤ 大野泰生, 等号付き多重ゼータ値の様相といくつかの予想, 多重ゼータ値の諸相・RIMS 研究集会, 2010 年 9 月 6 日, 京都大学.

⑥ 大野泰生, Royle の自己補グラフに関する予想と辺着色グラフについて, 日本数学会・年会・応用数学分科会, 2010 年 3 月 24 日, 慶応義塾大学.

⑦ 大野泰生, 自己補グラフに関する Royle の予想と色つきグラフについて, 2009 年度応用数学合同研究集会, 2009 年 12 月 19 日, 龍谷大学.

⑧ 佐々木義卓, 大野泰生, 山崎知佳, ある離散対数問題に関する古典アルゴリズムと量子アルゴリズムの比較について, 第 8 回「代数学と計算」研究集会 (AC2009), 2009 年 12 月 4 日, 首都大学東京.

⑨ 大野泰生, Relations among Dirichlet series whose coefficients are class numbers of binary cubic forms, Number Theory Seminar, 2009 年 11 月 30 日, 浦項工科大学数学研究所 (POSTECH)・韓国.

⑩ 大野泰生, 多重ゼータ値の重み付き和公式と、関連する話題, 第 2 回ゼータ若手研究集会, 2010 年 2 月 20 日, 名古屋大学.

⑪ 大野泰生, 多重ゼータ値の  $\{2,1\}$  公式と和公式の拡張, 熊本大学数学談話会, 2008 年 10 月 24 日, 熊本大学.

⑫ 大野泰生, 多重ゼータ値の満たす線形関係式について, 熊本大学数学談話会・プロジェクトゼミナール, 2008 年 10 月 24 日, 熊本大学.

⑬ 大野泰生, Two-one formula for zeta-star values, TSUDA COLLEGE WORKSHOP ON NUMBER THEORY AND PHYSICS AT THE CROSSROADS, 2008 年 8 月 6 日, 津田塾大学.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

大野泰生 (OHNO YASUO)  
近畿大学・理工学部・教授  
研究者番号: 70330230

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

若槻聡 (WAKATSUKI SATOSHI)  
金沢大学・数物科学系・助教  
研究者番号: 10432121