

機関番号：16301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20540035

研究課題名（和文）完全交叉のレフシェッツ性問題とジェネリックイニシャルイデアルに関する研究

研究課題名（英文）Study on the Lefschetz properties and generic initial ideals of complete intersections

研究代表者

張間 忠人 (HARIMA TADAHITO)

愛媛大学・教育学部・准教授

研究者番号：30258313

研究成果の概要（和文）：レフシェッツ性は、アルティン次数付環の基本的かつ重要な性質である。本研究では、完全交叉のレフシェッツ性とジェネリックイニシャルイデアルについて考察し、次のような成果を得た。1. k 階レフシェッツ性をもつアルティン環のベッチ数の上限を与えた。2. 4変数の単項式で生成されるある完全交叉のジェネリックイニシャルイデアルを求めた。3. 最強のジョルダン分解のテンサー積は再び最強である。これは、強いレフシェッツ性がテンサー積で不変であることの一般化である。4. 弱いレフシェッツ性を持たないゴレンスタイン環の例を与えた。

研究成果の概要（英文）：The Lefschetz properties are basic and important properties for Artinian graded algebras. In this research, we studied the Lefschetz properties and generic initial ideals of complete intersections. As a result, we obtained the following. 1. We gave a sharp upper bound on the Betti numbers of Artinian algebras with the k -Lefschetz property and a fixed Hilbert function. 2. We found generic initial ideals of some complete intersections in four variables. 3. The tensor product of strongest Jordan decompositions is again strongest. This is a generalization of the fact which states that the strong Lefschetz property is preserved by tensor product. 4. We gave some examples of Gorenstein algebras not having the weak Lefschetz property.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：可換環論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：完全交叉、レフシェッツ性、ジェネリックイニシャルイデアル、単項式イデアル、ゴレンスタイン環、ジョルダン標準形

1. 研究開始当初の背景

強いレフシェッツ性と弱いレフシェッツ

性は、ゴレンスタイン環に対して、期待される自然な性質であり、また組合せ論と表現論の様々な問題と深く関連している。レフシェ

ツ性をもつアルティン次数付環の数値的不変量（とくにヒルベルト関数やベッチ数列）は最近よく研究されており、それ故に、どのような環がこれらの性質をもつか？という問題は興味あるものである。これらの性質をもつゴレンスタイン環は、これまでも国内外の多くの人達により、広範囲において研究されている（Boij, Geramita, Iarrobino, 池田ひでみ, Migliore, Nagel, Shin, Zanello, 渡辺純三 他）。

30年ほど前に Stanley と渡辺純三により、独立に異なる手法で「単項式で構成される完全交叉は強いレフシェッツ性をもつ」ことが証明された。しかし、その後、一般の完全交叉に対しても同じ結果が期待されていたが、この問題は未解決のままであった。ところが2003年に、研究代表者である張間は、Migliore, Nagel, 渡辺純三との共著論文において、ベクトル束に関する Grauert と Mulich の結果を使って、「余次元3の完全交叉環は弱レフシェッツ性をもつ」ことを証明した。この結果は、これまで30年間、進展が見られなかった完全交叉のレフシェッツ性問題に対して、非常に重要な意味をもち、その後、この論文の引用件数も多い。この結果は、「完全交叉は強いレフシェッツ性をもつ」という予想の肯定的解決に向けての大きなステップである。しかしながら否定的解決であっても、すなわち、レフシェッツ性を持たない高次元の完全交叉が存在したとしても、これもまた、完全交叉の新しい分類研究に関する対象のクラスとして大変興味深いものになるであろう。

次数付環のレフシェッツ性問題を考えることの重要性は、日本の研究者にはあまり関心がもたれていないようにも見えるが、年々着実に世界に広がっている。レフシェッツ性問題は、今後ますます可換代数の研究において重要なテーマの一つになるであろう。

2. 研究の目的

研究代表者は、本研究課題に関してこれまで次の研究を行っている。

・2006～2007年度、基盤研究 (C)、研究課題番号18540003、研究課題名「完全交叉のレフシェッツ問題に関する研究」

この研究では、強いレフシェッツ性を持つ判定方法として、中心的単純加群なる概念を導入し、それを使った新しい手法の開発により、強いレフシェッツ性をもつ完全交叉の様々な例を構成するなど、一定の成果を得ることができた。引き続き、完全交叉のレフシェッツ性問題とその応用に関する研究を、同じ研究分担者の協力の下で行う。

本研究の目的は、次の2つの問題について

考察し、解決することである。

問題1 完全交叉は強レフシェッツ性をもつか？

問題2 完全交叉イデアルのジェネリックイニシャルイデアルを決定せよ。

(1) 最近、渡辺純三氏との共同研究において、ゴレンスタイン環のレフシェッツ性問題に関する中心単純加群の理論を構築することができ、問題1の解決に向けて大きく前進した。本研究では、この中心単純加群の理論をさらに発展させ、問題1の解決を目指すことである。まず、対称群の作用で不変なゴレンスタイン環は強いレフシェッツ性をもつかどうかについて考察する。

(2) 問題2に関しては、和地輝仁氏との共同研究において、 k 階レフシェッツ性なる概念を導入し、完全交叉のジェネリックイニシャルイデアルを決める問題への一つの方向性を示すことができた。今後は、さらにこの手法を発展させ、様々な完全交叉のクラスに対して、そのジェネリックイニシャルイデアルを決定したい。まず、単項式で生成される完全交叉イデアルのジェネリックイニシャルイデアルについて考察する。

(3) さらに、完全交叉のレフシェッツ性問題の応用を探る。

3. 研究の方法

完全交叉のジェネリックイニシャルイデアルの解明と次数付環のクラスにおいて定義されるレフシェッツ性の一般化に焦点を当てて研究を進めた。とくに、単項式で定義される完全交叉のジェネリックイニシャルイデアルの解明とアルティン局所環のレフシェッツ性の一般化（一次式で定まる最強のジョルダン標準形を決める問題）を中心に研究を進めた。

(1) 研究分担者のメンバーと適宜セミナーと研究打合せを行い議論し理論を進展させた。完全交叉のジェネリックイニシャルイデアルの決定問題については、研究分担者の和地と研究打合せを密に行った。アルティン局所環のレフシェッツ性の一般化問題については、研究分担者の渡辺と研究打合せを密に行った。また2010年度は研究分担者に五十川を招き、局所環のRees元に関する話題と sl_2 の表現の基礎理論に関して様々な貴重な助言を

いただいた。

- (2) 2009年度からは、研究分担者と森田英章(室蘭工業大学)、前野俊昭(京都大学)、沼田泰英(東京大学)の協力の下で、これまでの研究成果の集大成として本の執筆を始めた。
- (3) 研究期間中、できる限りいろいろな研究集会に積極的に参加し情報収集を行った。また、2009年1月27日から1月29日にかけて、例年行われている可換環論セミナー(21回目)を居相真一郎氏(北海道教育大学札幌校)とともに釧路市生涯学習センター(北海道釧路市)において主催した。若手研究者・大学院生を中心に合計18の興味深い講演と活発な議論が行われた。参加者は約40名であった。研究分担者の渡辺も「Heese形式とSLP」と題して講演を行った。

4. 研究成果

研究分担者・研究協力者の協力の下で、完全交叉のレフシェッツ性問題とその応用、さらに完全交叉のジェネリックイニシャルイデアルに関する研究を行い、一定の成果を得ることができた。

- (1) アルティン次数付環(アルティン次数付イデアル)のクラスに k 階レフシェッツ性なる概念を導入し、それらの性質をもつアルティン次数付環のヒルベルト関数を特徴付け、次数付ベッチ数の上限をそのヒルベルト関数の言葉を用いて記述した。この結果は、和地輝仁との共著論文③で発表した。また、ゴレンスタイン環のレフシェッツ性問題に関する中心単純加群の理論を含め、この結果は、代数学シンポジウムで紹介した。
- (2) 第21回可換環論セミナーで渡辺が「Heese形式とSLP」と題して講演を行った。19世紀後半に書かれた、Paul GordanとMax NoetherによるHessianに関する論文[Mathematische Annalen 10]を現代的立場から解釈することが、SLPの解明に密接に関連していることが次第に明らかになってきた。すくなくともゴレンスタイン環のSLPの第一条件に関して、それに対応する斉次多項式のHessianが恒等的に消えるか否かに関わる渡辺氏の結果は、完全交叉のレフシェッツ性問題への解決の糸口になるであろう。この結果は、論文④で発表された。
- (3) k 階レフシェッツ性をもつイデアルの

(逆辞書式順序による)ジェネリックイニシャルイデアルについて考察し、その結果、4つの単項式からなるある完全交叉のジェネリックイニシャルイデアルは、同じヒルベルト関数をもつ reverse lexsegment イデアルであることを示した。この結果は、和地輝仁との共著論文①で発表した。また、日本数学会で紹介した。 k 階レフシェッツ性は持つが $(k+1)$ 階レフシェッツ性は持たないイデアルの分類は、そのジェネリックイニシャルイデアルを求める一つの方法である。

- (4) 渡辺純三氏の論文「 m -full ideals」のアイデアを用いて、アルティン局所環において、レフシェッツ元の一般化であるリース元の概念を導入した。強いリース元は、最強のジョルダン標準形をもつ一般的な一次式として与えられる。また、強いリース元は、テンサー積で不変であること(これは、強いレフシェッツ性がテンサー積で不変であることの一般化になっている)、さらにリース元のベキは、どんな元のベキよりも最強のジョルダン標準形をもつなどリース元の興味深い性質をいくつか示した。レフシェッツ元は、レフシェッツ性をもつ環においてのみ定義されたが、リース元は、一般の環で定義される概念である。今後、リース元が、アルティン局所環の研究において有用な道具になることを期待している。
- (5) レベル環とその標準加群のイデアル化により構成されるアルティンゴレンスタイン環に対して、その最強ジョルダン分解について考察した。その結果、単純な unimodal ヒルベルト関数をもつアルティンゴレンスタイン環で、弱いレフシェッツ性を持たない例を組織的に構成する方法を見つけた。同時に、この構成方法で得られる unimodal でないゴレンスタイン環に対しても、その最強ジョルダン分解を求めることができた。上記(4)とこの成果については、渡辺純三氏との共著論文を準備中である。今後の課題は、弱いレフシェッツ性をもつが強いレフシェッツ性を持たないゴレンスタイン環の構成方法を見つけることである。
- (6) 完全交叉のレフシェッツ性問題に関するこれまで5年間の研究成果をもとにして、渡辺、和地、森田、前野、沼田とともに、大学院生や若い研究者向けの本を執筆している。23年度中に完成させホームページで公開するとともに、専門誌へ投稿する予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計10件)

- ① Tadahito Harima, Sho Sakaki and Akihito Wachi, Generic initial ideals of some monomial complete intersections in four variables, *Archiv der Mathematik*, 69 巻 129–137 (2010), 査読有
- ② Toshiaki Maeno, Yasuhide Numata, Akihito Wachi, Strong Lefschetz elements of the coinvariant rings of finite Coxeter groups, *Algebras and Representation Theory* (Springer), 査読有
- ③ Tadahito Harima and Akihito Wachi, Generic initial ideals, graded Betti numbers, and k -Lefschetz properties, *Communications in Algebra*, 37 巻 4012–4025 (2009), 査読有
- ④ Toshiaki Maeno and Junzo Watanabe, Lefschetz elements of Artinian Gorenstein algebras and Hessians of homogeneous polynomials, *Illinois Journal of Mathematics*, 53 巻 591–603 (2009), 査読有
- ⑤ Aldo Conca, Christian Krattenthaler and Junzo Watanabe, Regular sequences of symmetric polynomials, *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 121 巻 179–199 (2009), 査読有
- ⑥ Hideaki Morita, Akihito Wachi and Junzo Watanabe, Zero-dimensional Gorenstein algebras with the action of the symmetric group, *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* 121 巻 45–71 (2009), 査読有
- ⑦ Hidemi Ikeda and Junzo Watanabe, The Dilworth lattice of Artinian rings, *Journal of Commutative Algebra*, 1 巻 315–326 (2009), 査読有
- ⑧ Kyo Nishiyama and Akihito Wachi, A note on the Capelli identities for symmetric pairs of Hermitian type, *Infinite dimensional harmonic analysis IV*, 223–254 (2009), 査読有
- ⑨ Masao Hara and Junzo Watanabe, The determinants of certain matrices arising from the Boolean lattice, *Discrete Mathematics*, 308 巻 5815–5822 (2008), 査読有
- ⑩ Soo Teck Lee, Kyo Nishiyama and Akihito Wachi, Intersection of harmonics and Capelli identities for symmetric pairs, *Journal of the Mathematical Society of*

Japan, 60 巻 955–982 (2008), 査読有

[学会発表] (計2件)

- ① 張間忠人、和地輝仁、Generic initial ideals of some complete intersections in four variables、日本数学会、2010年9月23日、名古屋大学
- ② 張間忠人、完全交叉のレフシェッツ性問題について、第53回代数学シンポジウム、2008年8月5日、いわて県民情報交流センター

[その他]

ホームページ等

・ <http://kenqweb.office.ehime-u.ac.jp/Profiles/0003/0002304/theses1.html>

・ <http://kenqweb.office.ehime-u.ac.jp/Profiles/0003/0002304/gakkail.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

張間 忠人 (HARIMA TADAHITO)

愛媛大学・教育学部・准教授

研究者番号：30258313

(2) 研究分担者

(2008～2010年度)

渡辺 純三 (WATANABE JUNZO)

東海大学・理学部・教授

研究者番号：40022727

和地 輝仁 (WACHI AKIHITO)

北海道教育大学釧路校・教育学部・准教授

研究者番号：30337018

(2010年度)

五十川 読 (ISOGAWA SATORU)

熊本高等専門学校・共通教育科・教授

研究者番号：80223056