様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年４月１日現在

機関番号：１３２０１
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008～2010
課題番号：２０５４００４０
研究課題名（和文）開代数多様体における基礎体の拡大についての研究

研究課題名（英文）Study on affine algebraic varieties and extension of the base field

研究代表者
浅沼　照雄　（ASANUMA　TERUO）
富山大学・大学院理工学研究部（理学）・教授
研究者番号：５０１１５１２７

研究成果の概要（和文）：n 次元複素空間上 n 個の n 変数多項式により定義される多項式写像はそのヤコビアンが零でない定数ならば同型写像になる、という予想はヤコビアン予想といわれ、２以上の n について未解決問題となっている。本研究はこの予想について２変数の場合に代数学的、位相幾何学的立場から研究を進めとくに予想と同値ないくつかの具体的な条件をあたえた。

研究成果の概要（英文）：The Jacobian conjecture asserts that a polynomial map of the n-dimensional affine space over the complex number field defined by n polynomials in n variables with the Jacobian nonzero constant must be an isomorphism. The conjecture is still open for any n>1. We study the conjecture from the algebraic and topological point of view and give several conditions equivalent to the conjecture.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	1,400,000	420,000	1,820,000
２００９年度	900,000	270,000	1,170,000
２０１０年度	700,000	210,000	910,000
総　計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：開代数幾何学、ヤコビアン予想

１．研究開始当初の背景

複素数体 C 上の n 個の n 変数多項式の組は n 次元複素空間 C^n 上の写像を定義する。この写像を多項式写像という。以下 □ で表す。次の問題または予想はヤコビアン予想といわれ、ちょうど７０年前に O.H.Keller により明確に提出されたものであるが、ヤコビアンの概念がヤコビにより導入されて以来の未解決問題となっている。

「ヤコビアン予想」□ のヤコビアンが零でない定数ならば □ は同型写像となる。

この予想についてこれまでに多数の論文が発表されてきた。とくに代数的な観点からこの予想の解決に向け種々の提案がなされてきた。にもかかわらず２変数の場合ですら未解決になっている。

多項式写像は通常の位相に関して連続写像になる。この写像のヤコビアンがゼロでない定数という条件（以下ヤコビアン条件ということにする）は C^n の任意の点において局所的に同相写像になる，ということと同値である。さらにこの写像が同相であればその逆写像も多項式写像になることは比較的容易に示されるからヤコビアン予想は次のようにも定式化できる。

「幾何学的ヤコビアン予想」□ が局所同相ならば同相である。

ここではヤコビアン予想とは「幾何学的ヤコビアン予想」を意味する。便宜のため □ の定義域、および値域を必要に応じて拡張また

は制限して考える。

一般的にヤコビアン条件を満たす □ は有限分技被覆となることが証明できる。そこでSをC^nの分岐集合とすると余次元が１（それゆえ実多様体の余次元としては２）のC^nの部分代数多様体になる。上記予想が正しいことと分岐集合が空集合であることは同値であるから、そのようなSの存在の可能性を調べることがこの予想の解決にむけてのひとつのアプローチになりうる。すなわちSが存在するとしてそのみたすべき代数的、位相的性質から反例を構成するか、または矛盾を導いて肯定的に証明することである。以上が本研究テーマの背景である。

２．研究の目的

上記の背景、状況の下でとくに２変数の幾何学的ヤコビアン予想を研究の目的とした。

この場合分岐集合Sが存在すると仮定すれば複素平面代数曲線Cとなる。この曲線は位相幾何学的に考えれば実４次元空間内の曲面となりこの曲面の高次元絡み（リンク）が意味を持ち､Cの補集合$C^2 \setminus C$の位相構造が問題となる。この観点からヤコビアン予想に詳細な検討を加え、この予想と同値で、より検証可能と思われる具体的な条件を見つけることが主な目標である。

３．研究の方法

ヤコビアン予想の解決に向けて必要な代数幾何学的、位相幾何学的方法の研究、さらには関連する開代数幾何学の諸問題についての研究が研究内容についての計画・方法の柱となった。この方針に沿って研究を進めるための具体的な研究方法は以下によった。

（１）研究に必要なパーソナルコンピュータ、ソフトウエア、書籍および消耗品等を購入、使用した。

（２）次に述べるように各地の研究者と随時研究連絡、討論、打ち合わせを行った。また資料収集、成果発表等を行って、研究を着実に進めた。

まず２００８年１０月米国で開かれた米国数学会の中部支部会において本研究代表者により研究開始当初の研究課題についての状況が報告された。

２００８年１２月にはインドで開かれた開代数幾何学についての国際会議で、それまでの成果と今後の課題について発表した。

２００９年２月は国立台湾大学に滞在、期間中開かれた代数学のミニワークショップに参加、研究課題について講演および討論を行った。

２００９年７月はオランダで開代数空間の自己同型についての国際会議に参加、講演および資料収集を行った。

２００９年８月には東京で日本数学会の代数学分科会等で講演を行った。

２０１１年２月～３月コルカタ統計大学において研究打ち合わせ、講義および講演、タタ基礎科学研究所において研究打ち合わせおよび成果発表を行った。

連携研究者も含む２つの定期的な研究集会（アフィン代数幾何学研究集会於関西学院大学、可換環論金沢セミナー於金沢工業大学）に参加、本研究課題の研究の進捗状況を随時発表、報告および討論を重ねて研究を進めてきた。

４．研究成果

研究目的で述べたヤコビアン予想と同値な条件をあたえた定理の詳細について記す。また、予想の解決に向けこれらの結果を用いた今後のアプローチについてのべる。

以下、f,gはつねに複素数体C上の２変数多項式C[x,y]の元とし、□ =(f,g)： $C^2 \to C^2$をf,gで定義された多項式写像とする。ヤコビアン予想はつねにこの２変数の場合を意味する。

（１）標準的対

与えられた複素係数多項式 f=f(x,y)について最高次の斉次多項式をf^+と表す。

定義１．多項式の対（f,g)または□ が次の２つの条件をみたすとき標準的（standard）という。

(1)　f^+ にはx が現れない。

(2)　C(y/x,f,g)= C(x,y)。

さらにf,gがC[x,y]で既約ならば□ =(f,g)は既約という。

またヤコビアン条件をみたす標準的対(f,g)を標準的ヤコビアン対(standard Jacobian pair)またはSJPという。

命題２．C[x,y]の２つの多項式 f,g が C 上で代数的独立ならば C[x,y]の C-自己同型写像 σ が存在して(σ(f),σ(g))は標準的対となる。さらにf,gがヤコビアン条件をみたすとき(σ(f),σ(g))が既約な SJP になるように σ を選ぶことができる。

系３．任意の既約なSJP□が同相写像ならばヤコビアン予想は正しい。

（２）擬有限点

アファイン平面の点(x,y)∈C^2を(x:y:1)と同一視する事により射影平面 P^2 ={(x:y:z)}の点と考える。それゆえC^2はP^2の部分空間であり、無限遠直線{(x:y:0)}をL_∞と表したとき $P^2 = C^2 \cup L_\infty$ である。以下

この仮定の下で考える。

定義4．□ を多項式写像とする。無限遠点 $P_\infty \in L_\infty$にたいして無限点列$\{P_i\}$ $(i=1,2,....)$がC^2に存在して次の２つの条件をみたすときP_∞は「□ に関して擬有限」、または □ が明らかなときは単に「擬有限」、という。

(1) 点列$\{P_i\}$はP^2内でP_∞に収束する。

(2) 点列$\{□(P_i)\}$はC^2内の一点 P’に収束する。

上記の点列$\{P_i\}$ $(i=1,2,...)$を P の定義点列 (defining sequence) という。擬有限点 P_∞について P_∞の像 $□(P_\infty)$をすべての定義点列の像の極限の集合、すなわち

$□(P_\infty)=\{P' \mid P_\infty$の定義点列 $\{P_i\}$が存在して $i\to\infty$ のとき $□(P_i)\to P'\}$

で定義する。

注意5．定義点列のとり方により P’が異なることがあるので $□(P_\infty)$は一点とは限らないことに注意する。このばあい □ は通常の意味での $C^2\cup P_\infty$ から C^2への連続写像には拡張できない。

例6．$□=(xy+y^2,y)$とすると $P_\infty=(1:0:0)$はただ１つの擬有限点である。定義点列は $P_i=(i:0:1)$で与えられる。また $□(P_\infty)$は値域C^2の y 軸である。

命題7．もし C^2内に有界でない点列$\{P_i\}$ $(i=1,2,...)$が存在して点列$\{□(P_i)\}$が有界ならば擬有限点 $P_\infty\in L_\infty$が存在して$\{P_i\}$の部分列$\{P_{s(i)}\}$ $(i=1,2,...)$がPの定義点列となる。

系8．□ が同相ならば擬有限点は存在しない。

注意9．擬有限点が存在しなくても同型でない □ が存在する。たとえば$(x+y^2, y^3)$などがそうである。一般に共通の因子を持たない C 上代数的上独立な f, g についてほとんどの場合、擬有限点は存在しない。次の命題は存在するためのひとつの必要条件を与えている。

命題１０．$P_\infty=(p:q:0)\in P^2$が擬有限ならば

$$f^+(p,q)=g^+(p,q)=0$$

がなりたつ。

系１１．□ が SJP とするとき、擬有限点 P_∞が存在するならば$P_\infty=(0:0:1)$の１点である。

（３）分岐被覆

□ $=(f,g)$: $C^2\to C^2$を標準的対とする。y/x は C(f,g) 上代数的であるから、C 上既約な多項式 $F:=F(T,X,Y)$ □ $C[T,X,Y]$が同伴を含めてただひとつ存在して $F(y/x,f,g)=0$ を満たす。F を$C[X,Y]$係数の T の次数 n の多項式と考えて

$$F=F_0(X,Y)+F_1(X,Y)T\cdots+F_n(X,Y)T^n$$

と表せば$C(f,g)$上 y/x の最小多項式と考えられるから $C(x,y)=C(y/x,f,g)$に注意すると $n=[C(x,y):C(f,g)]$となる。

ここで $F_0:=F_0(X,Y)$の $C[X,Y]$における既約分解を

$$F_0=G_0^{\lambda 0}G_1^{\lambda 1}\cdots G_m^{\lambda m}$$

とする。すると

$F_0(f(x,0),g(x,0))=F(0,f(x,0),g(x,0))=0$

であるから $G_0(f(x,0),g(x,0))=0$ として一般性を失わない。このとき $\mu(□)=\lambda_0$, $\nu(□)=m$ と表す。

補題１２．□ が SJP とするとき、ほとんどすべての複素数 a について

$$□_a:=(f(x,y-a),g(x,y-a))$$

は $\mu(□_a)=1$ なる SJP である。

系１３．$\mu(□)=1$ を満たす任意の既約な SJP が □ 同相写像ならばヤコビアン予想は正しい。

$C_i=V(G_i)$ $(i=0,1,2,...,m)$とおくと C_i は(X,Y)を座標とする平面 E:= C^2内の平面カーブである。またEは中への単射

$$(X,Y)\to(T,X,Y)$$

により(T,X,Y)を座標とする３次元空間C^3内の自然な平面とみなす事が出来る。それゆえ $V:=V(F)$を$F(T,X,Y)$で定義されたC^3の超曲面とおくと

$$C_0\cup\cdots\cup C_m=V(F)\cap E$$

となる。

命題１４．次がなりたつ。

(1) $1/y \in C[x,y,F_0(f,g)^{-1}]$,

(2) $C[x,y,F_0(f,g)^{-1}]/C[f,g,F_0(f,g)^{-1}]$

は整拡大である。

補題１５．□ が SJP ならば、C の任意の元 a について $C[f(x,ax),g(x,ax)]$のその商体における整閉包は$C[x]$である。

命題１６．(f,g)を SJP とする。すると任意の $a\in C\setminus\{0\}$について $F(a,X,Y)\in C[X,Y]$は$C[X,Y]$で既約である。

注意１７．命題１６について $F(0,X,Y)$との違いに注意(定理２１参照)すること。また証明については補題１５を用いる代数的なものと、位相幾何的なものがある。後者の証明はやや複雑であるが、３変数以上の場合にも拡張が可能である。代数的な証明は３変数以上への拡張はきわめて困難である。

系１８．(f,g)を SJP、Φ_a: C $\to C^2$を多項式写像であって $a\in C^2$に対して

$$x\to(f(x,ax),g(x,ax)) \quad (x\in C)$$

で定義されているものとする。すると Φ_a はCからV(F(a,X,Y))への全射はめ込みである。

下の系はヤコビアン予想において□ に単射を仮定すれば同型であるというよく知られた事実のSJPを用いた証明である。

系１９．Φ がSJPで、n=1とする。このとき $a\in C\setminus\{0\}$ が存在して

$$(-ax, a^{-1}y)=(F_1(f,g), F_0(f,g))$$

がなりたつ。

標準的対 □ は自然に C^2 の分岐被覆とみなせる。すなわち C^2 の分岐集合Sが存在して

$$□: C^2\setminus□^{-1}(S) \rightarrow C^2\setminus S$$

は被覆指数(covering index, degree) n=[C(x,y):C(f,g)]をもつ被覆(covering)となる。

命題２０．□ はSJPで、μ(□)=1とすると

$$S=□(P_\infty) = C_1\cup \cdots\cup C_m\ (=V(G_1\cdots G_m))$$

が成り立つ。

定理２１．□ がSJPとする。すると次の(1)-(3)は同値である

(1) $F_0(X,Y)$ は既約である。

(2) $P_\infty=(1:0:0)$ は擬有限でない。

(3) □ は同型である。

次は定理２１に関連して証明されるが $V(F)(\subset C^3)$ の位相幾何学的特徴を与えている。

定理２２．□ がSJPで μ(□)=1および $(f(0,0),g(0,0))=(0,0)$ とする。

任意の与えられた $0<\alpha\in R$ について

$$D_\alpha=\{(x,tx)\mid x\in C\setminus\{0\}, 0<|t|\leq\alpha\}\subset C^2$$

および

$$V_\alpha=V(F)\cap\{(T,X,Y)\mid 0<|T|\leq\alpha, (X,Y)\neq(0,0)\}\subset C^3$$

とおく。すると

(1) D_α の基本群は $\pi(D_\alpha)= Z\oplus Z$ である。

(2) $(x,y)\rightarrow(y/x,f,g)$ で定義される有理写像 $\Phi:C^2\rightarrow C^3$ は D_α から V_α への全射はめ込みとなる。

一般論より連続写像 Φ は基本群の準同型

$$\Phi^*:\pi(D_\alpha)= Z\oplus Z\rightarrow\pi(V_\alpha)$$

を引き起こす。それゆえ ν(□)≠0のとき、群論的にこの準同型が存在しないことを示すことができれば □ は同相であることがわかる。以上より次の予想を得た。

予想２３．上記準同型は ν(□)≠0のとき存在しない。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

① 浅沼照雄　ヤコビアン予想の位相的側面､第54回代数学シンポジウム報告集2010、99-108 査読無

〔学会発表〕（計９件）

① 浅沼照雄、Topological aspect of the Jacobian Conjecture、2008年、10月17日、Western Michigan University（米国）招待

② 浅沼照雄、Topological aspect of the Jacobian Conjecture、Conference on Affine algebraic geometry 2008年12月28日バンガロール（インド）招待

③ 浅沼照雄、Jacobian Conjecture、Mini-work shop on Algebra 2009年2月10日-11日 国立台湾大学（台湾）招待

④ 浅沼照雄、Topological approach to the Jacobian Conjecture アフィン代数幾何学研究集会 2009年3月18日 関西学院大学（大阪）招待

⑤ 浅沼照雄、国際会議 Automorphisms of Affine Space Topological approach to the Jacobian Conjecture 2009年7月6日　ラドボード大学（オランダ）招待

⑥ 浅沼照雄　ヤコビアン予想の位相的側面、日本数学会第54回代数学シンポジウム 2009年8月4日　明治大学（東京）招待

⑦ 浅沼照雄、Topology of the image of a polynomial map、アフィン代数幾何学研究集会 2009年9月6日 関西学院大学（大阪）招待

⑧ 浅沼照雄、Branched covering induced by a polynomial map、 アフィン代数幾何学研究集会 2010年3月6日 関西学院大学（大阪）招待

⑨ 浅沼照雄、Topology of singularities of polynomial curves with the Jacobian non-zero constant、アフィン代数幾何学研究集会 2010年9月5日　関西学院大学（大阪）招待

６．研究組織

(1)研究代表者

浅沼　照雄(ASANUMA TERUO)

富山大学・大学院理工学研究部（理学）・教授

研究者番号：50115127

(2)連携研究者

小野田　信春(ONODA NOBUHARU)

福井大学・工学部・教授

研究者番号：40169347