様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　24　年　6　月　6　日現在

機関番号：14301
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2008　～　2011
課題番号：20540042

研究課題名（和文）種々の代数多様体の具体的構成

研究課題名（英文）Explicit constructions of several algebraic varieties

研究代表者
中山　昇　（NAKAYAMA NOBORU）
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号：10189079

研究成果の概要（和文）：非同型な全射自己正則写像を有する曲面の分類問題について，そのような曲面の具体的構成を行うことにより二つの成果を得た．ひとつは正規射影的複素代数曲面の場合で，その分類が有理曲面の特別な場合を除いて完成した．もうひとつは正標数の非特異射影的代数曲面の場合で，自己正則写像に分離性の条件を課すが，この場合にも一定の分類結果が得られた．

研究成果の概要（英文）：Two results are obtained by applying explicit constructions to the classification problem of surfaces which admit non-isomorphic surjective endomorphisms. One is the case of normal projective complex surfaces, and the classification has been completed except for the case of some special rational surfaces. The other is the case of non-singular projective surfaces in positive characteristic, and we have also certain classification results assuming that the endomorphisms are separable.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
総　計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数幾何

１．研究開始当初の背景

代数幾何学では，与えられた条件を満たす多様体を何らかの意味で分類せよ，という問題設定が多い．このとき，最初に具体例を構成し，その後条件を満たすものがその例に限る，という手順で解決するものが数多くある．この際，具体例をどの程度構成できるかが問題解決の鍵となる．また，分類結果を述べる際も，構成方法がよくわかった多様体を並べる方が望ましい．なぜなら構成方法が不明では，いくつかの不変量が決定できてもその多様体がいったい何か，と言う点で不完全な分類とみなされ得る．ただし，具体的構成が不明でも多様体の構造がかなり解明される

ことがある．たとえば，一般の K３曲面は構成方法が不明ながらも，トレリ型定理によってホッジ構造から数多くの性質を導くことができる．また具体的構成は判らないけれども，具体的に構成された多様体の変形として得られる多様体の場合も，いくつかの性質が変形を通じて解明されることもある．しかし，具体的に構成できる方が望ましいことに異論は無い．このような考察から，代数多様体の分類問題における具体的構成の手法を整理し，発展させることが重要であると思われる．今回の研究は，このような視点から特に研究代表者の今までの研究に現れた多様体を元にして，新しい多様体の具体的構成，記述を試みようと考えた．

２．研究の目的

与えられた条件を満たす代数多様体を分類する際に，その多様体を出来るだけ具体的に構成する．ただしここで言う構成は，知られている多様体からブローアップ，分岐被覆，群作用による商，ベクトル束に付随する射影空間束，いくつかの方程式の零点集合，などの形またはその組み合わせで，目的の多様体を記述することを意味する．そしてその対象となる多様体は、楕円ファイバー空間，トーラスファイバー空間，非同型な全射自己正則写像を有する多様体などである．

３．研究の方法

同型でない（正標数の場合は，さらに分離的な）全射自己正則写像を有する代数多様体の分類についてのみ述べる．他の場合の研究はほとんど進展がなかった．

自己正則写像に対する対数的分岐公式から，多様体や関連する因子についての特異性の情報が得られる．複素数体上の場合，力学系の研究で用いられる力学的次数を代数的にとらえることで新たな情報を得ることができ，たとえばある場合には，交点数が負の曲線の非存在などがわかる．また力学系の再帰的性質が多様体に強力な条件を課す．これらの情報と（双有理）代数幾何学の以下の基本的手法を用いて分類結果を得る．

① ２次元対数的極小モデル理論．
② 楕円曲線上の射影直線束の分類．
③ トーリック曲面の構成とその性質．
④ 巡回被覆のテクニック．
⑤ ガロア閉包と分岐指数の振る舞い．
⑥ 標準因子とオイラー数の挙動．
⑦ トーリック曲面，アーベル曲面，楕円曲線上の射影直線束における有限群の作用の記述．
⑧ 正標数の非特異代数曲面の分類．
⑨ 正標数の楕円曲面のＩ型重複ファイバーの記述．

また与えられた不同型な全射自己正則写像に付随する「特性完全不変因子」を定義し，これに注目して曲面の構造を調べた．非特異な場合の分類で重要な役割を果たした自己交点数が負な曲線はすべて特性完全不変因子の既約成分になる．

４．研究成果　以下の⑴，⑵の結果を得た．これらはほとんど研究されてこなかったテーマであり，国内外における位置づけとインパクトは不明である．また今後どのように発展していくのかもわからない．

⑴　正規射影的複素代数曲面で非同型な全射自己正則写像を有するものの分類が有理曲面の特別な場合を除いて完成した．それらはある６種類の典型的な曲面を，余次元１で不分岐な有限次ガロア被覆をもつことで特徴づけられる．その６種類とは以下の通りである．

① 射影直線と種数２以上の非特異曲線の直積,
② 楕円曲線と種数２以上の非特異曲線の直積,
③ アーベル曲面,
④ 楕円曲線上の射影直線束,
⑤ 楕円曲線上の射影的錐,
⑥ トーリック曲面(ただしガロア群がトーリック曲面の境界因子を保存するという条件を課す)．

⑴の補足(a)．上の⑴の分類に属さない例外的な有理曲面の場合についても以下のように一定の構造が解明された．

① ピカール数が３以上のとき, 自己交点数が負の曲線の本数がピカール数に一致し，それらは有理曲線の線形鎖をなす．この鎖は対数的標準特異点の境界因子になっている．
② ピカール数３が以上のときは二つの場合に分かれ, そのうちの一つは「概トーリック曲面」という, ショクロフのトーリック曲面判定法を一つ緩めて定義される曲面となる. 概トーリック曲面の具体的構成法とその構造はほぼ解明されたが, それがいつ非同型な全射自己正則写像を持ち得るのかは不明である．
③ 残されたもう一つの場合もトーリック曲面に関係するいくつかの性質を確認できるが，詳しくはわからない．

④　ピカール数が１のものは、対数的デルペッツォ曲面である．ピカール数が１の有理曲面は，非特異な場合は射影平面に限るが，特異点を持つ対数的デルペッツォ曲面の場合は無数にある．また射影平面の有限群の作用による商空間は常に非自明な全射自己正則写像を持ち，⑴の分類に属さない例外の一つである．

⑴の補足(b) ⑴の証明では最小特異点解消により非特異代数曲面の場合に帰着することができない．なぜなら自己正則写像はその最小特異点解消に必ずしも正則に延長できないからである．

⑴の補足(c) ⑴の証明方法から以下の結果がその系として得られる．

①　正規モイシェゾン曲面は射影的でなければ非同型な全射自己正則写像をもたない．

②　正規射影的代数曲面が非同型な全射正則写像をもつとき，その曲面と自己正則写像に付随する特性完全不変因子との対は対数的標準特異点しかもたない．ただし，このような曲面が対数的標準特異点しか持たないことはウォール氏によって２０年ほど前に知られていた．

③　上の②の曲面が商特異点以外の特異点をもつならば，それは ⑴の分類の⑤の場合に対応する．すなわち，余次元１で不分岐な被覆空間として楕円曲線上の射影的錐が得られる．とくに二次元カスプ特異点をもつことはない．

⑵ 正標数の非特異射影的代数曲面で非同型かつ分離的な全射自己正則写像を有するものの分類について，小平次元が非負のときは標数ゼロの場合とほぼ同じ分類結果になった．小平次元が負の場合，おおよその構造は決定できたが，標数ゼロでは起こりえない現象をいくつか確認した．具体的には以下の結果を得た．

①　小平次元が非負のとき，非同型な分離的全射自己正則写像を持つための必要十分条件は，その曲面が小平次元が０または１の極小曲面であり，オイラーポアンカレ標数がゼロ，ということである．
特に，以下の曲面がこれに該当する．
A) アーベル曲面，超楕円曲面，擬超楕円曲面（標数２，３の場合）．
B) 小平次元１の楕円曲面で特異ファイバーが楕円曲線の重複ファイバーに限るもの．

②　小平次元が負で不正則数がゼロならばこの曲面は大きな反標準因子をもつ有理曲面である．さらにもし自己正則写像の次数が標数と互いに素ならば，トーリック曲面である．またすべての標数に対し，次数が標数に等しい分離的自己正則写像を有する有理曲面でトーリック曲面でないものが存在する．

③　小平次元が負で不正則数が１ならば，この曲面は楕円曲線上の射影直線束である．

④　小平次元が負で不正則数が２以上ならば，この曲面は曲線上の射影直線束であり自己交点数が負となる曲線をもたない．さらに自己正則写像の次数が標数と互いに素ならば，底曲線の有限次被覆による基底変換でこの曲面は自明な射影直線束になる．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　５件）

① <u>Noboru Nakayama</u>, Separable endomorphisms of surfaces in positive characteristic, “Algebraic Geometry in East Asia - Seoul 2008” Adv. Stud. Pure Math. 査読有, vol. 60, 2010, pp. 301-330, Math. Soc. Japan. http://mathsoc.jp/publication/ASPM/contents/CFM60.pdf

② <u>Noboru Nakayama</u>, Intersection sheaves over normal schemes, J. Math. Soc. Japan, 査読有, 62 (2010), 487－595. DOI: 10.2969/jmsj/06220487

③ <u>Noboru Nakayama</u>, De-Qi Zhang, Polarized endomorphisms of complex normal varieties, Math. Ann. 査読有, 346 (2010), 991 - 1018. DOI: 10.1007/s00208-009-0420-y

④ <u>Noboru Nakayama</u>, De-Qi Zhang, Building blocks of étale endomorphisms of complex projective manifolds, Proc. London Math. Soc. 査読有, 99 (2009), 725-756. DOI: 10.1112/plms/pdp015

⑤ Yoshio Fujimoto, <u>Noboru Nakayama</u>, Complex projective manifolds which admit non-isomorphic surjective endomorphsms, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, 査読有, B9 (2008), 51 - 79. http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ken

kyubu/bessatsu/open/B9/B9.html

〔学会発表〕（計　１件）

① Noboru Nakayama, Normal projective surfaces admitting non-isomorphic surjective endomorphisms, Algebraic Geometry in East Asia, Nov. 12, 2008, Korea Institute for Advanced Study. (Korea)

６．研究組織

(1)研究代表者

中山　昇（NAKAYAMA NOBORU）
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号：10189079