

自己評価報告書

平成 23 年 4 月 1 日現在

機関番号：16401

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008~2011

課題番号：20540045

研究課題名 (和文) 偏極多様体の断面幾何種数による随伴束の大域切断の次元に関する研究

研究課題名 (英文) Study on the dimension of global sections of adjoint bundles of polarized manifolds by their sectional geometric genera.

研究代表者

福間 慶明 (FUKUMA YOSHIAKI)

高知大学・教育研究部自然科学系・教授

研究者番号：20301319

研究分野：代数学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数学, 偏極多様体, 豊富な因子, 随伴束, 断面幾何種数

1. 研究計画の概要

複素数体上定義された n 次元非特異射影多様体 X とその上の豊富な因子 L の組 (X, L) を偏極多様体と呼ぶ. このとき多様体上に定義される標準因子 K と豊富な因子 L との和で定義される因子 $K+L$ を随伴束という.

この随伴束の飯高次元が 0 以上のときはこの随伴束を何倍かすると大域切断を持つことがわかる.

そこで本研究では, 実際に何倍すればどの随伴束に対しても大域切断を持つかについて考える.

その際に偏極多様体の不変量である断面幾何種数などの性質を用いて調べることが本研究の目的である.

今回の研究課題では特に X の次元が 3 次元と 4 次元の場合について主に考える.

1. 3 次元の場合についてはすでに 2 倍すれば大域切断を持つことがわかっているので, あとは 2 倍する必要があるかどうかについて調べればよいことになるのでこれについて研究する.

2. 4 次元の場合については, 考察に多重偏極多様体に関する不変量が必要であることがわかっているのでこれに関する性質を研究する. また 4 次元の場合を考察する手段として, 取り扱いがしやすいと思われる「随伴束が nef となる場合」を考察し, その結果を用いて一般に随伴束の飯高次元が 0 以上の場合について考察する.

3. 正標数の体上定義された非特異射影多様体上で上と同様のことを考えてみる.

2. 研究の進捗状況

1. 3 次元準偏極多様体の随伴束の大域切断とそれに関連する結果について

(1) 3 次元かつ L が豊富な因子のとき, 随伴束 $K+L$ の大域切断の次元を調べる際には第 2 断面幾何種数と $h^2(0_X)$ の間の関係を調べることが重要になる. L が大域切断を持つ場合には第 2 断面幾何種数が $h^2(0_X)$ 以上であることがわかっている. そこでこれらが等しくなる場合の 3 次元偏極多様体について分類を行う試みをおこなった. まだ完成していないが, 部分的な結果は得られた.

(2) 3 次元であり L が nef かつ big であるときの第 2 断面幾何種数の下限について考察した. さらにその結果を用いて随伴束 $K+2L$ の大域切断の次元を考察することにより「 $K+2L$ の飯高次元が 0 以上であることと $K+2L$ が大域切断を持つことは同値である」ことを示した. これは L が豊富な因子のとき Beltrametti と Sommese により提出された予想の nef かつ big 版としてとらえることができる. さらに $K+2L$ の大域切断のなす次元が小さい場合の (X, L) についての分類もおこなった.

2. 4 次元準偏極多様体の随伴束の大域切断とそれに関連する結果について

(1) L が豊富な因子で, さらに随伴束 $K+L$ が nef となるときに, $m(K+L)$ が大域切断を持つような正整数 m を調べ, m が 3 以上の任意の整数の時には, $m(K+L)$ が大域切断を持つことが

わかった。

(2) X がある種の特異点を持つ場合についても調べることで、 $K+L$ の飯高次元が非負であるときに、 m が6以上の任意の偶数に対して $m(K+L)$ が大域切断を持つことがわかった。

(3) $K+L$ がnefとなるときに、 $m(K+L)$ が大域切断を持つような正整数 m を調べる方法は $n=5$ の場合についても適用できることがわかった。

3. 不変量に関する結果

(1) 次元が2または3で、 L がnefかつbigであり、さらに L の大域切断のなす次元が X の次元が2のときは1、 X の次元が3のときは3以上であるとき (X, L) の断面種数は X の不正則数以上であることが以前に証明されていたが、断面種数と不正則数が等しくなる場合の分類を行った。

(2) 第 i 断面幾何種数と第 i Δ -種数の応用の一つとして随伴束 $K+(n-i)L$ が自明となるような偏極多様体の特徴付けについて考えた。 X の次元を n とすると、 $i=1$ のときは藤田隆夫氏により $K+(n-1)L$ が自明であるための必要十分条件は Δ 種数が1かつ断面種数が1であることが示されている。第 i 断面幾何種数と第 i Δ -種数を用いて、これの一般化とみなされる結果を予想し、次の3つの場合に正しいことを示した。① i が $(L$ の基点集合の次元)+2以上の場合。② $i=2$ のとき。③ $i=3$ かつ n が5以上のとき。

3. 現在までの達成度

② おおむね順調に進展している。

(理由) 目標としていた場合のひとつである3次元の場合が、私の考察を踏まえ、Höringの研究により一般に解決され、さらにもうひとつの目標である4次元の場合の研究も進んでいるため。

4. 今後の研究の推進方策

今までに取り組んできた方法、つまり断面幾何種数を用いた考察方法が今のところ適切であろうと思われるので、その方法で今まで以上に深く研究を続けていく。

また正標数の体上定義された非特異射影多様体の場合に関する考察が進んでいないので、これについてもできる限り研究を進めていく。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

- ① 福間 慶明, Effective non-vanishing of global sections of multiple adjoint bundles for polarized 3-folds, Journal of pure and applied algebra, 215, 168-184, (2011), 査読有.
- ② 福間 慶明, A note on quasi-polarized surfaces of general type whose sectional genus is equal to the irregularity, Le Matematiche, 65, 155-161, (2010), 査読有.

[学会発表] (計4件)

- ① 福間 慶明, 4次元偏極多様体における多重随伴束の大域切断のなす次元について, 日本数学会, 平成22年9月24日, 愛知県・名古屋大学.
- ② 福間 慶明, 3次元準偏極多様体におけるある随伴束の大域切断のなす次元について, 日本数学会, 平成22年3月24日, 神奈川県・慶應義塾大学.
- ③ 福間 慶明, 3次元偏極多様体における多重随伴束の大域切断のなす次元について, 日本数学会, 平成21年9月26日, 大阪府・大阪大学.
- ④ 福間 慶明, 随伴束が自明となる偏極多様体の不変量による特徴づけについて, 日本数学会, 平成20年9月25日, 東京都・東京工業大学.