

機関番号：17201

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20540047

研究課題名（和文） Stanley-Reisner 環の重複度と極小自由分解に関する研究

研究課題名（英文） Study on the multiplicities and minimal free resolutions of Stanley-Reisner rings

研究代表者

寺井 直樹 (TERAI NAOKI)

佐賀大学・文化教育学部・准教授

研究者番号：90259862

研究成果の概要（和文）：多項式環の被約単項式イデアルである Stanley-Reisner イデアルのべきについて研究した。その結果、その 3 乗以上のあるべき乗が Cohen-Macaulay 性をもつならば、任意のべき乗も Cohen-Macaulay 性をもつことがわかった。また、そのとき、もとのイデアルは完全交差となる。このことは Cowsik-Nori の定理に対して単項式イデアルの場合に精密化を与えていることになる。

研究成果の概要（英文）：We studied Stanley-Reisner ideals, which are squarefree monomial ideals in polynomial rings. As a result we have proved that any powers are Cohen-Macaulay if a certain m -th power of a Stanley-Reisner ideal is Cohen-Macaulay, where m is more than two. In this case the original ideal is a complete intersection. This is a refinement of the Cowsik-Nori theorem in the case of monomial ideals.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：可換環論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：Stanley-Reisner 環、Cohen-Macaulay 環、極小自由分解、重複度

1. 研究開始当初の背景

平成 17 年度以前の研究において、Stanley-Reisner 環の次元を d とするとき、その Stanley-Reisner イデアルの全ての生成元の次数が d 以下でありその Stanley-Reisner 環の重複度が $2d-1$ 以下ならば、その正則度は d 以下であることを示した。それを受けて

平成 18 年度には Stanley-Reisner イデアルの第 1 シジジー加群の全ての生成元の次数が $d+1$ 以下であるとするとき、その Stanley-Reisner 環の重複度が $3d-2$ 以下ならば、その正則度は d 以下であることを示した。それから一般に Stanley-Reisner イデアル

の第 p シジジー加群の全ての生成元の次数が $d+p$ 以下であるとするとき、その Stanley-Reisner 環の重複度が $(p+2)d-(p+1)$ 以下ならば、その正則度は d 以下であることが予想される。平成 19 年度は、この予想に対して、Stanley-Reisner 環の次元 d が 2、3 のときにそれが成立することを示した。

2. 研究の目的

被約単項式イデアルである Stanley-Reisner イデアル及び、多項式環を Stanley-Reisner イデアルで割った環である Stanley-Reisner 環は可換環論的観点のみならず Stanley-Reisner 環から定まる単体的複体を通して組合せ論、トポロジーとも深く関係しており、とても興味深い研究対象である。本研究は Stanley-Reisner イデアル及び Stanley-Reisner 環の極小自由分解に現われる様々な不変量相互の関係を探ることを目的とする。具体的には Stanley-Reisner 環の重複度と射影次元の関係、特に Cohen-Macaulay 性と重複度の関係、および、Stanley-Reisner イデアルの Castelnuovo-Mumford 正則数と重複度との関係さらに Stanley-Reisner イデアルの射影次元と算術階数の関係に焦点をあてて研究する。あわせて その結果の数え上げ組合せ論、凸多面体論への応用を探ること、特に、凸多面体論における下限定理の拡張を目的にしている。

3. 研究の方法

Stanley-Reisner イデアルの極小自由分解についてその可換環論的、組合せ論的性質を考察するために、まず具体的な

Stanley-Reisner イデアルについて、組織的に不変量の計算を行いデータを収集した。それらのデータから帰納的に組合せ論的法則、代数的メカニズムを推測し証明しようと試みた。また、一般の次数つき環と相違に注意をはらいつつ、それらにも共通する性質をグレーブナー基底の理論を用いて導出しようとした。また、より抽象的にホモロジカルな性質を圏論的に考えた。

以上のように、組合せ論的観点、位相幾何学的観点、純可換環論的観点、圏論的観点のそれぞれの長所をとりいれ、研究代表者、研究分担者の間で緊密な連絡をとりながら総合的に研究していった。

4. 研究成果

(1) 平成 20 年度は次数 2 の元で生成される Stanley-Reisner イデアルであるエッジイデアルに焦点を当てて研究した。純なエッジイデアルの高さは不定元の個数の半分以上であることが知られているので、エッジイデアルの高さが丁度、不定元の個数の半分であるときについてそのエッジイデアルの構造を詳しく調べた。まず、このとき、対応する単体的複体が強連結であることと Stanley-Reisner 環が Cohen-Macaulay であることは同値であることを示した。これは、2部グラフのエッジイデアルに関して同様のことを示した Herzog-Hibi の結果の一般化となっている。さらに、これが、殻化可能と言う条件とも同値であることも示した。これは、2部グラフのエッジイデアルに関して同様のことを示した Villarreal の結果の一般化となっている。また、標準加群の生成元の個数である Cohen-Macaulay 型を与える組合せ論的表示も得た。また、このとき、そのエッジイデアルが完全交叉でないならば、そのエッジイ

デアルの2乗以上の冪はCohen-Macaulayとはならないことを示した。このことを用いて、エッジイデアルの場合におけるCowsik-Noriの定理の精密化を与えた。すなわち、エッジイデアルの高さ以上のある数に対して、エッジイデアルのその冪乗がCohen-Macaulay環を与えるならば、そのエッジイデアルは完全交叉であることを示した。

(2) 平成21年度も次数2の元で生成されるStanley-Reisnerイデアルであるエッジイデアルに焦点を当てて研究した。平成20年度はエッジイデアルの高さが丁度、不定元の個数の半分であるときについて調べたのであるが平成21年度は一般のエッジイデアルについて平成20年度の結果が拡張であるかどうかを調べた。5角形のエッジイデアルは完全交叉でないがその2乗はCohen-Macaulayとなるので、エッジイデアルの高さが丁度、不定元の個数の半分であるときには成立する、エッジイデアルが完全交叉でないならば、そのエッジイデアルの2乗以上の冪はCohen-Macaulayとはならないという結果はそのままの形では成り立たない。しかし、一般のエッジイデアルに対して、エッジイデアルが完全交叉でないならば、そのエッジイデアルの3乗以上の冪はCohen-Macaulayとはならないことを示した。これは、エッジイデアルの場合におけるCowsik-Noriの定理の精密化である。また、形式べきに関して、エッジイデアルのすべての形式べきがCohen-Macaulayとなる必要十分条件はグラフが完全グラフの非連結和であることを示した。また、グラフが完全グラフの非連結和でないならば、そのエッジイデアルの3乗以上の形式べきはCohen-Macaulayとはならないということも示した。

(3) 平成21年度はエッジイデアルに対して、それが完全交叉でないならば、そのエッジイデアルの3乗以上の冪はCohen-Macaulayとはならないことを示した。また、グラフが完全グラフの非連結和でないならば、そのエッジイデアルの3乗以上の形式べきはCohen-Macaulayとはならないということも示した。平成22年度の研究目標はこれらの結果をStanley-Reisnerイデアルに拡張することであった。Trung 教授との共同研究の結果次の結果を得た。Stanley-Reisnerイデアルが完全交叉でないならば、そのStanley-Reisnerイデアルの3乗以上の冪はCohen-Macaulayとはならない。これは、Stanley-Reisnerイデアルの場合におけるCowsik-Noriの定理の精密化である。また、単体的複体がマトロイドでないならば、そのStanley-Reisnerイデアルの3乗以上の形式べきはCohen-Macaulayとはならないということも示した。さらに単体的複体が頂点の分離されているマトロイドの結びでないならば、そのStanley-Reisnerイデアルの3乗以上の形式べきは等次元局所Cohen-Macaulayとはならないということも示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

(1) M. Barile and N. Terai,

The Stanley-Reisner ideals of polygons as set-theoretic complete intersections, Communications in Algebraに掲載予定. 査読有

(2) K. Kimura, N. Terai, and K. Yoshida,

Schmitt-Vogel type lemma for reductions, Archiv der Mathematik (Basel) に掲載予定 査読有

(3) H. Haghighi, N. Terai, S. Yassemi, and R. Zaare-Nahandi,
Sequentially S_r simplicial complexes and
Sequentially S_2 graphs,
Proceedings of American Mathematical Society
に掲載予定 査読有

(4) M. Crupi, G. Rinaldo, and N. Terai,
Cohen-Macaulay edge ideal whose height is half
of the number of vertices,
Nagoya Mathematical Journal に掲載予定 査
読有

(5) M. Crupi, G. Rinaldo, N. Terai, and K. Yoshida,
Effective Cowsik-Nori theorem for edge ideals,
Communications in Algebra 38 (2010) 3347-3357
査読有

(6) M. Barile and N. Terai,
Arithmetical ranks of Stanley-Reisner ideals of
simplicial complexes with a cone,
Communications in Algebra 38(2010) 3686-3695,
査読有

(7) V. Ene, O. Olteanu, and N. Terai,
Arithmetical rank of Lexsegment edge ideals,
Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie
(N.S.) 53 (101) (2010) 315-327 査読有

(8) K. Kimura, N. Terai, and K. Yoshida,
Arithmetical rank of monomial ideals of deviation
two,
in "Contemporary Mathematics Series 502
Combinatorial aspects of commutative
algebra,(V. Ene and E. Miller eds.)"
Contemporary Mathematics Series 502, 2009
pp73-112, AMS 査読有

(9) K. Kimura, N. Terai, and K. Yoshida,
Arithmetical rank of squarefree monomial ideals
of small arithmetic degree,
Journal of Algebraic Combinatorics 29(2009)
389-404 査読有

(10) N. Terai and K. Yoshida,
Locally complete intersection Stanley-Reisner
ideals,
Illinois Journal of Mathematics 53(2009)
413-429 査読有

(11) S. Murai and N. Terai,
H-vectors of simplicial complexes with Serre's
conditions,
Mathematical Research Letters 16(2009)
1015-1028 査読有

(12) N. Terai and K. Yoshida,
A note on Cohen-Macaulayness of
Stanley-Reisner rings with Serre's condition
(S_2),
Communications in Algebra 36(2008) 464-477 査
読有

[学会発表] (計 12 件)

(1) 寺井直樹,
licci edge ideal について,
第23回可換環論セミナー,
2011年2月1日, 山口

(2) N. Terai and K. Yoshida,
The second power of Stanley-Reisner ideals,
The 32nd Symposium on Commutative
Algebra/The 6th Japan-Vietnam Joint Seminar
on Commutative Algebra,
2010年12月15日, 葉山

(3) N. Terai,

Cohen-Macaulayness for ordinary and
symbolic powers of edge ideals,
The first seminar on combinatorial
commutative algebra, 2010 年 2 月 10 日,
Tehran (Iran)

(4) 吉田健一, 寺井直樹,
squarefree monomial ideal のべきについ
て, 第 22 回可換環論セミナー, 2010 年 2 月 3
日,
松本

6. 研究組織

(1) 研究代表者

寺井直樹 (TERAI NAOKI)
佐賀大学・文化教育学部・准教授
研究者番号: 9 0 2 5 9 8 6 2

(2) 研究分担者

上原 健 (UEHARA TSUYOSHI)
佐賀大学・工学系研究科・教授
研究者番号: 8 0 0 9 3 9 7 0

市川 尚志 (ICHIKAWA TAKASHI)
佐賀大学・工学系研究科・教授
研究者番号: 2 0 2 0 1 9 2 3

宮崎 誓 (MIYAZAKI CHIKASHI)
佐賀大学・工学系研究科・教授
研究者番号: 9 0 2 2 9 8 3 1

河合 茂生 (KAWAI SHIGEO)
佐賀大学・文化教育学部・教授
研究者番号: 3 0 1 8 6 0 4 3