様式 C-7-2

自己評価報告書

平成　２３　年　５　月　８　日現在

機関番号：３２６８６
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：　2008～2012
課題番号：　２０５４００５１
研究課題名（和文）　モーデル・ヴェイユ格子理論の展望と代数曲面論

研究課題名（英文）　Prospects for Mordell-Weil Lattices and Algebraic Surfaces

研究代表者
塩田　徹治（SHIODA　TETSUJI）
立教大学・理学部・名誉教授
研究者番号：０００１１６２７

研究分野：代数幾何学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：モーデル・ヴェイユ格子、Ｋ３曲面、球のつめこみ、整点、グレブナ基底,abc-定理

１．研究計画の概要

以下のテーマを中心に研究、

（１）Ｋ３曲面と球のつめこみ問題、（２）ある種の楕円曲面の存在、有限性定理と定義体の問題、（３）モーデル・ヴェイユ格子から生ずるガロア表現と代数方程式、（４）フェルマー曲面上の代数的サイクル、（５）楕円曲面の整点の研究とグレブナ基底

２．研究の進捗状況

（1）球のつめこみ問題と関係付けることにより、ある種の楕円 K3曲面のモーデル・ヴェイユ格子、ネロン・セヴェリ格子、および超越格子の構造を決定した。

（２)楕円曲面を1変数多項式環の abc-定理との関係で考察した。とくに、abc-定理で等号が成立する場合に注目して Belyi の定理を適用するにより、一般の算術種数の場合に、射影直線上の半安定かつ extremal な楕円曲面の存在と有限性を確立した。これは、算術種数１、２の有理楕円曲面やＫ３曲面に関する既知の結果を、任意の算術種数の場合に拡張したものである。

（３）モーデル・ヴェイユ格子から生ずるガロア表現および代数方程式について、①ワイル群 W(E_8) をガロア群とする整数係数多項式の具体例を構成した。②半安定な有理楕円曲面の族に対応する乗法的理論を、E_6 の場合に確立し、３次曲面などに応用した。

（４）フェルマー曲面のネロン・セヴェリ群の生成元についての既知の結果「曲面の次数ｍが６と互いに素のときは、有理数係数では直線が生成元となる」ことを精密化して、本研究においては、「ｍが６と互いに素かつ１００以下のとき、フェルマー曲面のネロン・セヴェリ群が直線達によって整数係数で生成される」ことを証明（シュットおよびヴァン・ルイクとの共著論文）。

（５） 楕円曲面上の整点の有限性（ジーゲルの定理の類似）をモーデル・ヴェイユ格子のハイト公式を用いて確立。これをもとに底曲線が射影直線の場合に「整点スキーム」の概念を導入し各整点の「重複度」を定義し、基本的な問題を提起した。そして有理楕円曲面の場合にはモーデル・ヴェイユ格子の構造と例外的ルート格子 E8 についての知見を用いて、これらの問題を完全に解決した。とくに整点の重複度を完全に決定した。この結果は、整点のイデアルのグレブナ基底の計算などに、興味深い応用をもつ。

３．現在までの達成度

①当初の計画以上に進展している。

理由　上の進捗状況の項目に書いたように、テーマ（1）.（2）については、初年度に所期の目標を達成できた。(論文⑦、⑧、図書①。)

またテーマ（3)、(4)、(5）についても、順調に進展している。とくに、前項（3）①で述べた E__8 のワイル群をガロア群とする整数係数多項式の簡明な例の構成（論文⑥)や、(4）でのフェルマー曲面のネロン・セヴェリ群の生成元に関する研究(論文①)は、著しい結果として内外の数学者から評価された。さらに、テーマ（5）では、楕円曲面

の整点の個数と重複度について、有理楕円曲面の場合に満足すべき結果を得た（論文④、⑤)。これをＫ３曲面等に拡張することを次の目標のひとつとしている。

4.今後の研究の推進方策
モーデル･ヴェイユ格子から生ずるガロア表現および代数方程式について､半安定な有理楕円曲面の族に対応する乗法的理論の確立を､前年度の E_6 の場合に引き続き、E_7, E_8 の場合に拡張したい。とくに、E_r 型の単純代数群の表現論との関連を視野に入れて研究することを考えている。

５． 代表的な研究成果
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 ８件）すべて査読有り。

①M. Schuett, T. Shioda, R.van Luijk: Lines on Fermat surfaces, Journal of Number Theory, 130, 2010, 1939- 1963

② M. Schuett, T. Shioda, Elliptic Surfaces: Advanced Studies in Pure Mathematics 60, 2010, 51-160

③ N. Aoki, T. Shioda: Correction and supplement: Generators of the Neron-Severi group of a Fermat surface, Comment.Math.Univ.St,Pauli 59, 2010, 65-75.

④T. Shioda: Groebner basis, Mordell-Weil lattices and deformation of singularities, I. Proc. Japan Acad. 86(A), 2010, 21-26.

⑤T. Shioda: Groebner basis, Mordell-Weil lattices and deformation of singularities, II. Proc. Japan Acad. 86(A), 2010, 27-32.

⑥T. Shioda: Some explicit integral polynomials with Galois group W(E_8), Proc. Japan Acad. 85A,2009, 118-121.

⑦ T. Shioda:K3 surfaces and sphere packings, J. Math. Soc.Japan 60, 2008, 1083-1105.

⑧T. Shioda:The abc-theorem, Davenport's inequality and elliptic surfaces, Proc. Japan Acad. 84A, 2008, 51-56.

〔学会発表〕（計 ７件）すべて招待講演

①T. Shioda: Remarkable configurations of curves on K3 by Dolgachev- Kondo-Katsura, *Workshop on Arithmetic and Algebraic Geometry, 1/19/2011,* 東京大学

② T. Shioda: Excellent families of rational elliptic surfaces, *Workshop on Reflection Groups,Lattices and Algebraic Geometry, 11/24/2010,* 名古屋大学

③T. Shioda: Mordell-Weil lattices and Galois representations: old and new, *Workshop on Arithmetic on Surfaces, 10/25/2010,* Lorentz Center,,Leiden Univ

④ T. Shioda: Cubic surfaces via Mordell-Weil lattice revisited, *Workshop on Elliptic fibrations and K3 surfaces, 7/14/2010, Humboldt Univ Berlin*

⑤T. Shioda: Some Topics on Mordell-Weil lattices, 代数学セミナー, 9/15/2009, 埼玉大学

⑥T. Shioda: Mordell-Weil lattices and Galois representations, 日本数学会・代数学シンポジウム、8/4/2009, 明治大学

⑦T. Shioda: Mordell--Weil lattices and integral sections, Conference “Diophantine Geometry: into the Millenniumm“, 6/5/2009, ETH-Zurich.

〔図 書〕 計（ １ ）件
① 塩田徹治:｢abc-定理,楕円曲面,モーデル・ヴェイユ格子｣(東京大学数理科学レクチャーノート 4)、東京大学大学院数理科学研究科、２００８、７８頁.