様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年　5 月　31 日現在

機関番号：32686
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2008 ～ 2012
課題番号：20540051
研究課題名（和文）モーデル・ヴェイユ格子理論の展望と代数曲面論

研究課題名（英文）Prospects for Mordell-Weil Lattices and Algebraic Surfaces

研究代表者
塩田　徹治（SHIODA TETSUJI）
立教大学・名誉教授
研究者番号：00011627

研究成果の概要（和文）：楕円曲面のモーデル・ヴェイユ格子および特別な代数曲面に関する以下のテーマを中心に研究した：（１）Ｋ３曲面と球のつめこみ問題の相関関係，（２）ある種の楕円曲面の存在、有限性定理，（３）モーデル・ヴェイユ格子から生ずるガロア表現と代数方程式，（４）例外型の乗法的卓越族の構成と応用．（５）楕円曲面の整点の研究とグレブナ基底，（６)フェルマー曲面上の代数的サイクル．得られた研究成果と発表論文は下記４に記述する．

研究成果の概要（英文）：We have studied selected topics on Mordell-Weil lattices (MWL) of elliptic surfaces: (1) K3 surfaces and sphere packing problem, (2) Existence and finiteness theorem of semi-stable extremal elliptic surfaces of any arithmetic genus, (3) Galois representations and algebraic equations arising from MWL, (4) Construction of multiplicative excellent families of elliptic surfaces with MWL of type E_6, E_7 or E_8, (5) Integral sections and Groebner basis, (6) Lines as generators of Neron-Severi group of Fermat surfaces.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
2012 年度	600,000	180,000	780,000
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：代数幾何学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数幾何学，モーデル・ヴェイユ格子，代数曲面，Ｋ３曲面，ガロア表現，球のつめこみ，整点，グレブナ基底．

１．研究開始当初の背景

研究代表者（塩田）が１９８９年以来構築してきたモーデル･ヴェイユ格子の理論は、一方では格子の新しい構成法を与えるとともに、他方では格子の情報をもとに、モーデル・ヴェイユ群本来の数論的性質ないし代数曲面の幾何学的性質を導きだす可能性をもつ．この優れた両面性をもとに、これまでに多くの成果が理論から応用にわたる領域で得られており、われわれの研究は国際的にも高い評価を得てきた．

２．研究の目的
本研究では、これらの研究成果を踏まえて、モーデル・ヴェイユ格子理論の更なる展望をはかり、また代数曲面上の代数的サイクルの知見を得るために、次の具体的なテーマについて研究を深めることを目標とした.
（１）Ｋ３曲面と球のつめこみ問題、
（２）ある種の楕円曲面の存在、有限性定理と定義体の問題、
（３）モーデル・ヴェイユ格子から生ずるガロア表現と代数方程式、
（４）例外型の乗法的卓越族の構成と応用.
（５）楕円曲面の整点の研究とグレブナ基底.
（６）フェルマー曲面上の代数的サイクル

３．研究の方法
（１）これらの問題の研究には，理論的な設定から実例の構成にいたるまで思考の手助けとしてコンピュータによる計算が欠かせない．所期の結果を確立するために，当科研費補助金で購入したコンピュータは大変役に立った.
（２）国内外の研究者との意見の交換，とくに海外の優秀な研究者との直接的議論は研究の推進上極めて有用であった．実際，以下の業績説明や発表論文に記すように，それぞれドイツ，オランダ，米国の大学に属する数学者 M. Schuett, R. van Luijk, A. Kumar 達との共同研究は，数編の国際的に注目を集める研究論文に結実させることが出来たことを付記する.

４．研究成果
上の各テーマ毎に研究成果を要約すると以下の通りである（発表論文の番号付け等は次頁参照).

（１）楕円曲線の直積のクンマー曲面から底変換で得られる６個の互いに同種な複素楕円Ｋ３曲面 Fn (n=1,,,6) について、Fn の超越格子を Tn とすると、「Tn の格子構造は T1 のそれの n 倍に同型である」ことを証明した．(n=2 のときは猪瀬・塩田の既知の結果)．証明の鍵は、対応するモーデル・ヴェイユ格子に球のつめこみ密度の限界を用いる。この結果により、楕円Ｋ3曲面 Fn のモーデル・ヴェイユ格子およびネロン・セヴェリ格子の構造が決定できる．論文⑨
また, この楕円Ｋ3曲面を正標数ｐでみると、適当な条件のもとに、ランクが（Ｋ3としては最大の）２０のものが現れる。ｐを固定したとき，これらのＫ3曲面は互いに同型であるが,「ランクが２０の楕円曲面としての同型類の個数はｐとともにいくらでも大きくなる」ことを論文①で示した.

（２）１変数多項式環の abc-定理で等号が成立する場合に注目して Belyi の定理を適用することにより、次の結果を証明した。「射影直線上の複素楕円曲面で半安定かつ extremal なものは、任意の算術種数に対し、存在し、かつその同型類が有限個しかない」。これは、算術種数１、２の場合（有理楕円曲面やＫ３曲面）に関するボーヴィル、パーソン等の結果を、任意の算術種数の場合に拡張したものである。論文⑩，図書①.

（３）モーデル・ヴェイユ格子から生ずるガロア表現を考え、ワイル群 W(E_8) をガロア群とする整数係数多項式の具体例を構成した（論文⑧)．E_6, E_7 について対応する事実は１９９０年の塩田の ICM 論文で証明されていた．最近，証明に必要な W(E_8)の群論的補題とともに，別の方法による構成が Jouve 等 によって提示されたので，その補題を援用してより簡単な具体例の構成を与えた.

（４）モーデル・ヴェイユ格子が E_6 型の有理楕円曲面の乗法的卓越族の構成に成功した（論文③)．さらに Kumar との共著論文②において, E_7, E_8 への拡張が確立された.
これらの E_r（r=6,7,8） 型の乗法的卓越族に関する結果を、以前に構成した有理楕円曲面の加法的卓越族に比較して言えば、次の通りである．モーデル・ヴェイユ群の分解体は、r 個の変数によって基礎体上生成される純粋超越拡大体であると同時に，族の定義体のガロア拡大でワイル群 W(E_r) をガロア群とするものである点は共通しているが、族を定義するワイヤシュトラス方程式の係数が、加法的な設定ではワイル群 W(E_r) の基本不変多項式となるのに対し、乗法的な設定では、変数のローラン多項式環内の基本不変式となる、言い換えると例外 E_r 型リー群（または環）の基本指標と等価になっている．これは整数論や del Pezzo 曲面に多くの応用をもつ重要な結果で, たとえば上の（３）と同様な応用がある.

（５） 楕円曲面で零切断と交わらない切断を整切断ないし整点とよぶ．整点の有限性（ジーゲルの定理の類似）はモーデル・ヴェイユ格子のハイト公式から明らかである．底曲線が射影直線の場合に「整点スキーム」の概念を導入し各整点の「重複度」を定義し、基本的な問題を提起した。そして有理楕円曲面の場合にはモーデル・ヴェイユ格子の構造とルート格子 E_8 についての知見を用いて、これらの問題を完全に解決，とくに整点の個数と重複度を完全に決定した．この結果は、整点のイデアルのグレブナ基底の計算でも検証される興味深い応用をもつ。論文⑥，⑦

（６）「複素フェルマー曲面のネロン・セヴェリ群は，次数mが６と互いに素のとき、直線達のクラスにより生成される」ことは周知の結果である．ただし有理数係数でのことである．本研究においてはこれを精密化して、「さらにmが１００以下のとき、整数係数で生成される」ことを証明した。適当な素数をとり、超特異的なフェルマー曲面のネロン・セヴェリ格子への埋め込みを利用する。シュットおよびヴァン・ルイクとの共著論文④.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 13 件）

①T. Shioda（塩田）: Elliptic fibrations of maximal rank on a supersingular K3 surface, Izvestia RAS, Ser. Math.77(3), 2013, 139-148,査読有, DOI: 10.4213/im8017

② A. Kumar, T. Shioda: Multiplicative excellent families of elliptic surfaces of type E_7 and E_8, Algebra and Number Theory, 査読有(受理済), http://arXiv.org/pdf/1204.1531

③ T. Shioda: Multiplicative excellent family of type E_6, Proc. Japan Acad. 86A, 21-26 (2012) ,査読有

④M. Schuett, T. Shioda, R. van Luijk: Lines on Fermat surfaces, Journal of Number Theory, 130, 2010, 1939-1963, 査読有

⑤ M. Schuett, T. Shioda, Elliptic Surfaces: Advanced Studies in Pure Mathematics 60, 2010, 51-160,査読有

⑥ T. Shioda: Groebner basis, Mordell-Weil lattices and deformation of singularities, I. Proc. Japan Acad. 86(A), 2010, 21-26,査読有

⑦ T. Shioda: Groebner basis, Mordell-Weil lattices and deformation of singularities, II. Proc. Japan Acad. 86(A), 2010, 27-32,査読有

⑧ T. Shioda: Some explicit integral polynomials with Galois group W(E_8), Proc. Japan Acad. 85(A), 2009, 118-121, 査読有

⑨T. Shioda: K3 surfaces and sphere packings, J. Math. Soc. Japan 60, 2008, 1083-1105,査読有

⑩ T. Shioda: The abc-theorem, Davenport's inequality and elliptic surfaces, Proc. Japan Acad. 84A, 2008, 51-56

〔学会発表〕（計　１７件）[すべて招待講演]

①　塩田　徹治: 2013 年 01 月 29 日, Manin's map and Mordell-Weil lattices, *Workshop on Arithmetic and Algebraic Geometry*, 東京大学大学院数理科学科

②塩田　徹治：2012 年 2 月 1 7 日, Excellent families of rational elliptic surfaces, *Workshop on Arithmetic and Algebraic Geometry*, 東京大学大学院数理科学科

③塩田　徹治：2011 年 12 月 1 5 日, Cubic surfaces via Mordell-Weil Lattices --Multiplicative excellent family of type E_6, インターシティー数論セミナー、Groningen Univ. オランダ

④塩田　徹治：2011 年 9 月 7 日, Cubic surfaces via Mordell-Weil Lattices re-revisited, *Workshop on Arithmetic and Algebraic Geometry*, 法政大学.

⑤塩田　徹治：2010 年 11 月 24 日, Excellent families of rational elliptic surfaces, *Workshop on Reflection Groups, Lattices and Algebraic Geometry*, 名古屋大学

⑥ 塩田　徹治：2010 年 10 月 25 日 , Mordell-Weil lattices and Galois representations: old and new, *Workshop on Arithmetic on Surfaces*, Lorentz Center, Leiden Univ, オランダ

⑦塩田　徹治：2010 年 7 月 14 日, Cubic surfaces via Mordell-Weil lattice revisited, *Workshop on Elliptic fibrations and K3 surfaces*, Humboldt Univ Berlin ドイツ.

⑧塩田　徹治：2010 年 2 月 17 日, Some new features of K3 surfaces in characteristic p, *Algebraic Geometry in characteristic p and related topics*, 東京大学

⑨塩田　徹治:2010 年 1 月 6 日, Mordell-Weil lattices and elliptic K3 surfaces, *Workshop on Elliptic Fibrations and*

F-theory, IPMU （東京大学）

⑩塩田　徹治:2009年10月21日,モーデル・ヴェイユ格子とグレブナ基底、数学談話会、神戸大学

⑪塩田　徹治：2009 年９月１５日 Some Topics on Mordell-Weil lattices, 代数学セミナー, 埼玉大学

⑫塩田　徹治：2009 年８月４日，Mordell-Weil lattices and Galois representations – Old and new, 日本数学会・代数学シンポジウム、明治大学

⑬塩田　徹治：2009 年６月５日，Mordell-Weil lattices and integral sections, *Conference “Diophantine Geometry: into the Millenniumm “*, ETH-Zurich.スイス

⑭塩田　徹治：2009 年１月１４日,有理楕円曲面の整切断（整点）について－グレブナ基底と E8 格子、数学談話会, 京都大学数理解析研究所

⑮塩田　徹治：2008 年１２月２日，Mordell-Weil lattices of certain elliptic K3 surfaces, *Conference on Arithmetic of K3 surfaces*, BIRS (Banff), カナダ

〔図書〕（計　１件）
①　塩田　徹治:　abc-定理,楕円曲面,モーデル・ヴェイユ格子（ 東京大学数理科学レクチャーノート4）,東京大学大学院数理科学研究科, 2008, 78頁.

６．研究組織
(1)研究代表者
塩田　徹治（SHIODA TETSUJI）
立教大学・名誉教授
研究者番号：00011627

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし