様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年６月９日現在

機関番号：３２６５７
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：２００８ ～ ２０１０
課題番号：２０５４００５４
研究課題名（和文） 対数的スムース退化上の混合ホッジ構造の研究

研究課題名（英文） Mixed Hodge structures on log smooth degenerations

研究代表者
藤澤 太郎（FUJISAWA TARO）
東京電機大学・工学部・准教授
研究者番号：６０２８０３８５

研究成果の概要（和文）：対数的スムース退化の一典型例である、ログ･デフォメーションの相対対数的ドラーム・コホモロジー群上に、自然な「積」および「トレース射」を構成した。さらに、これらが混合ホッジ構造の「偏極」を与えることを証明した。ここで「偏極」とは、ウエイト･フィルトレーションの各次数化上で個別に定まるものではなく､コホモロジー群全体で定義され各次数化上ではモノドロミー作用と上手く両立するような双線形形式のことである。

研究成果の概要（英文）：I succeeded to construct “product” and “the trace map” on the relative log de Rham cohomology groups of a log deformation, which is a typical example of log smooth degeneration. Moreover, I proved that these data provided a polarization on mixed Hodge structures, where the polarization is not a bilinear form on the graded pieces by the weight filtration on the log de Rham cohomology groups, but a bilinear form on the whole log de Rham cohomology groups satisfying the appropriated properties on the graded pieces by the weight filtration.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合 計
２００８年度	500,000	150,000	650,000
２００９年度	500,000	150,000	650,000
２０１０年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総 計	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：代数幾何学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：混合ホッジ構造、対数構造

１．研究開始当初の背景

(1) 複素多様体の退化

本研究の源流は、「極限混合ホッジ構造」に関するスティーンブリンクの結果である。彼は､1次元単位円板をパラメタ空間として、コンパクト・ケーラー・複素多様体が正規交叉多様体に退化する場合について、モノドロミー作用がべき単（unipotent）であるという仮定の下に、自然な極限混合ホッジ構造を構成し、対数的ホッジ・ドラームスペクトル列の E1-退化を示すとともに、退化が射影的である場合に、この混合ホッジ構造のウエイト・フィルトレーションが、モノドロミー・ウエイト・フィルトレーションに他ならないことを証明した。その後、スティーンブリンク自身による、モノドロミー作用がべき単でない場合への一般化や、エルザイン、あるいはスティーンブリンク・ズッカーによるコンパクトでない多様体の退化の場合への一般

化等の研究がなされてきた。
　さらに、最近では川又によって、弱セミステイブル・リダクションに対する極限混合ホッジ構造が構成され、さらに対数的ホッジ・ドラーム・スペクトル列が E1 項で退化することが証明されている。

(2) 対数幾何学の登場
　近年、フォンテーヌ・イリュジー・加藤和也による対数幾何学の理論の登場により、(1) で述べた、スティーンブリンク、エルザイン、ズッカー等の結果を対数幾何学の枠組みの中で捉え直す動きが現れてきた。
　すなわち、対数構造を付与してスキームや解析空間を考察するという対数幾何学の思想・方法により、(1) では多様体の退化としてのみ考察されていた正規交叉多様体を直接考察の対象とすることが可能となった。スティーンブリンクは「ログ・デフォメーション (log deformation)」という概念を定義したが、これは１次元単位円板をパラメータ空間とする、多様体のセミ･ステイブルな退化の特異ファイバーとして現れる正規交差多様体の、対数幾何学の枠組みにおける類似あるいは一般化と呼ぶべき対象である。
　その上で、スティーンブリンクは、彼自身の結果を対数幾何学の枠組みで証明することに成功した。すなわち、コンパクト・ケーラー・ログ・デフォメーションの相対対数的ドラーム・コホモロジー群に自然な混合ホッジ構造を構成するとともに、対数的ホッジ・ドラーム・スペクトル列が E1 項で退化することを証明した。さらに、射影的な場合には、ウエイト・フィルトレーションとモノドロミー・ウエイト・フィルトレーションが一致することも示している。

(3) 対数的スムース退化
　私は、ログ・デフォメーションをさらに一般化した「対数的スムース退化 (log smooth degeneration)」という概念を定義し、上記スティーンブリンクの結果を、この対数的スムース退化という対象に拡張することを目指した。
　その結果、コンパクトで「被約 (reduced) な」ケーラー対数的スムース退化の相対対数的ドラーム・コホモロジー群上に自然な混合ホッジ構造を構成し、さらに対数的ホッジ･ドラーム・スペクトル列が E1-項で退化することの証明に成功した。

(4) 研究課題
　その後、平成 18・19 年度に科学研究費の補助を受けた「対数的スムース退化の相対対数的ドラームコホモロジー群上の混合ホッジ構造の研究」において、被約でない対数的スムース退化の場合について研究を継続してきた。ここでは、主に、対数幾何における完全化 (exactification) を用いる方法を試みたが、完全化の過程の複雑さに阻まれ、明確な結論を得るには至らなかった。
　約言すれば、被約でない対数的スムース退化上の混合ホッジ理論は、依然確立されないままの状態であった。

２．研究の目的

(1) 混合ホッジ理論
　被約でないコンパクト･ケーラー対数的スムース退化上の混合ホッジ理論を構築すること、すなわち、相対対数的ドラーム・コホモロジー群上に自然な混合ホッジ構造を構成し、対数的ホッジ・ドラームスペクトル列の E1-退化を証明することが、本研究の第一の目的であった。

(2) モノドロミー作用
　(1) の目的達成の後には、さらにこの混合ホッジ構造へのモノドロミー作用について詳しく調べ、射影的な場合について、混合ホッジ構造を定めるウエイト･フィルトレーションと、このモノドロミー作用によるモノドロミー･ウエイト･フィルトレーションとが一致することを示すことが、本研究の第二の目的であった。

３．研究の方法

（１）　モノドロミー作用
　平成 18･19 年度の研究過程において、対数的スムース退化が「被約か否か」ではなく、モノドロミー作用が「べき単であるか否か」という点に着目することが重要であるという認識を得ていた。
　そこで、基底変換（の対数幾何的類似）により、モノドロミー作用がべき単である場合に帰着することにより、上記研究目的（１）の達成を目指していた。
　モノドロミーがべき単である場合には、スティーンブリンクやエルザインの古典的な場合と同様に、元の被約でない対数的スムース退化の相対対数的ドラーム・コホモロジー群と、その被約化の相対対数的ドラーム・コホモロジー群が同型になることが期待される。これを、我々の考察対象である対数的スムース退化の場合にも証明することにより、対数的スムース退化の被約化の場合へと帰着し、ここまで得られている結果を用いることを可能にするという方法を、まず最初に試みた。

（２）　双対性
　さらに研究を進めた結果、対数的スムース退化の相対対数的ドラーム・コホモロジー群

に対する「双対性（duality）」が重要な手掛りとして現れてきた。
そこで、まず手始めとして、対数的スムース退化のもっとも簡単な例であるログ･デフォメーションの相対対数的ドラーム・コホモロジー群に考察の対象を絞って、双対性の考察を進めるという方法をとった。

（３） 偏極

ログ・デフォメーションの相対対数的ドラーム・コホモロジー群上に双対性を確立するためには、「積」および「トレース射」を上手く構成した上で、これらのデータが、混合ホッジ構造の「偏極（polarization）」を与えることを示せばよい。
そこで、混合ホッジ構造の構成に、エルザインの方法を修正して用いることも可能であることを証明した上で、スティーンブリンクによる構成方法とエルザインによる構成方法を組み合わせることにより、上述の積およびトレース射が実際に偏極を与えることを示すという方法を用いた。

４．研究成果

（１） 被約化との比較

モノドロミー作用がべき単のとき 対数的スムース退化の相対対数的ドラーム･コホモロジー群 ＝ 被約化の相対対数的ドラーム・コホモロジー群

上記３．（１）で述べた方法に基づいて研究を進めた結果、モノドロミー作用がべき単である場合に、対数的スムース退化の相対対数的ドラーム・コホモロジー群と、その被約化の相対対数的ドラーム・コホモロジー群が同型であることの証明に成功した。

（２） ホッジ･フィルトレーション

ホッジ・フィルトレーションは一致するか？

しかしながら、元の対数的スムース退化のコホモロジー群上に定まるホッジ・フィルトレーションと、被約化のコホモロジー群上に定まるホッジ・フィルトレーションの一致を示すことが非常に困難であることが分かってきた。
相対対数的ドラーム複体のレベルでは、これら二つのホッジ・フィルトレーションは一致しないため、コホモロジー群に実際に導かれたフィルトレーションを考察する必要がある。

この状況を打破するために、上記３．（２）で述べたように、双対性を道具として使えないかと考え、手始めに、ログ・デフォメーションの相対対数的ドラーム・コホモロジー群の双対性について考察した。

（３） 双対性

双対性を得るためには、３．(3) で述べたように、相対対数的ドラーム･コホモロジー群上に、混合ホッジ構造としての偏極を構成すればよい。ただし、ここで言う偏極とは、スティーンブリンク・ズッカーの意味のウエイト･フィルトレーションによる各次数化上で個別に定まる物ではなく、カタニ･カプラン・シュミットの意味での偏極、すなわちコホモロジー群全体で定義され、ウエイト･フィルトレーションの各次数化上ではモノドロミー作用とうまく両立するような双線形形式のことである。
そこで、古典的なコンパクト･ケーラー多様体の場合と同様に、ログ･デフォメーションの相対対数的ドラーム･コホモロジー群に、自然な「積」と「トレース射」が定まり、これらのデータが実際に偏極を与えるのではないかと考えた。
実際、ログ･デフォメーションの相対対数的ドラーム複体には、対数的微分形式の外積という自然な積が存在し、これがコホモロジー群に自然な積を導くことは自明である。さらに、この積が混合ホッジ構造のホッジ･フィルトレーションと両立する（compatible）ことも、ホッジ･フィルトレーションの定義から直ちに見て取れる。問題は、この積とウエイト・フィルトレーションの関係を調べることである。

（４） 単体的方法

ログ･デフォメーション上への エルザインの単体的方法の拡張

ログ・デフォメーションの相対対数的ドラーム・コホモロジー群上にウエイト･フィルトレーションおよび混合ホッジ構造を構成するためには、スティーンブリンクによる方法のみが知られていた。
そこで、単位円板上の複素多様体のセミ・ステイブルな退化の場合にエルザインが用いた、単体的（simplicial）方法を適切に修正することにより、我々が考察しているログ・デフォメーションの相対対数的コホモロジー群上に、混合ホッジ構造を構成することが可能であり、さらに、これら二つの方法で構成される混合ホッジ構造が一致することを証明することができた。
この結果により、必要に応じてこれら二つの構成方法を組み合わせて用いることが可

能となった。
　これら二つの方法による混合ホッジ構造が一致することは、単位円板上のコンパクト・ケーラー複素多様体のセミ・ステイブルな退化に対しては、既にエルザインの研究により明らかにされていた。上記の結果は、このエルザインの結果をログ・デフォメーションの場合へと拡張したものである。

（５）　積・トレース射から偏極へ

積・トレース射 　　　→　偏極＝双対性

　積とウエイト・フィルトレーションの関係を調べるためには、エルザインの単体的方法が有効であり、相対対数的ドラーム複体の外積を単体的な場合へと拡張する必要があった。
　単体的な対象を扱うため幾分複雑で面倒な計算を実行する必要があったが、外積代数の基本的な性質に帰着させることによってこの計算を遂行し、積とウエイト・フィルトレーションが両立していることを証明した。
　一方、自然なトレース射を構成するためには、上記（４）で述べたように、スティーンブリンクの方法を用いる必要があった。
　実際、ログ・デフォメーションの相対対数的ドラーム複体を、スティーンブリンクの方法によって混合ホッジ複体で置き換え、その上のウエイト・フィルトレーションが定めるスペクトル列の然るべき E1 項の上に、積分を用いて自然な射を定めることができる。この射がスペクトル列の E2 項へ降下(descend)することを示し、このスペクトル列が E2 項で退化している事と合わせて、相対対数的ドラーム・コホモロジー群上の自然なトレース射を得ることができた。
　これら一連の計算をエルザインの方法によって実行しようとすれば、ウエイト・フィルトレーションが定める E1 項が非常に複雑になってしまい、E1 項で定義した自然な射が E2 項へと降下することを示すことが極めて困難になってしまう。
　このように、これら二つの方法を自由に使い分けることにより、自然なトレース射が構成でき、さらにウエイト・フィルトレーションおよびホッジ・フィルトレーションと上手く両立することを証明することに成功した。
　これらのデータが、ウエイト・スペクトル列の E1 項上で良い性質を持っていることは、上記の計算過程を詳しく検討することによって証明される。そこに、斉藤盛彦による、ホッジ・レフシェッツ型加群の理論を適用することにより、これらのデータが、射影的なログ・デフォメーションの相対対数的ドラーム・コホモロジー群上に偏極を定義することが証明された。

（６）　展望

対数的スムース退化上の双対性 　　→　被約でない対数的スムース退化上の混合ホッジ理論

　これまでの研究により、ログ・デフォメーションの相対対数的ドラーム・コホモロジー群の双対性（＝偏極）について明らかにすることができた。より一般的な対象である対数的スムース退化へ、これらの結果の拡張を試みることが次の課題であると考えている。
　さらに、そうして得られた双対性を利用することにより、被約でない対数的スムース退化上の混合ホッジ構造を確立することが目指すべき研究目的である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

①　<u>藤澤太郎</u>
Polarization on limiting mixed Hodge structures (announcement)
RIMS Kokyuroku Bessatsu B24(2011),47-66
査読有

〔学会発表〕（計２件）

①　<u>藤澤太郎</u>
Polarization on the limiting mixed Hodge structure
京都大学数理解析研究所研究集会「高次元代数幾何の周辺」
２００９年１２月１４日
京都大学理学部

②　<u>藤澤太郎</u>
Mixed Hodge structures on log smooth degenerations,
特異点と多様体の幾何　―草津 2008―
２００８年９月１５日
草津セミナーハウス

６．研究組織
(1)研究代表者
　藤澤　太郎（FUJISAWA TARO）
　東京電機大学・工学部・准教授
　研究者番号：６０３８０３８５

(2)研究分担者　なし

(3)連携研究者　なし