様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年 6 月 7 日現在

機関番号：11301
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2008 ～2010
課題番号：20540057
研究課題名（和文）　複素多様体と概複素多様体の微分幾何

研究課題名（英文）　Differential geometry of complex and almost complex manifolds

研究代表者
板東 重稔（BANDO SHIGETOSHI）
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：40165064

研究成果の概要（和文）：
概複素多様体に対しても小林双曲性が定義される。　概複素多様体の局所完備双曲性の解析的な証明は既に得られていたが、新たに微分幾何学的証明を得た。
ケーラー多様体のモーメント写像は安定性の問題と絡んで重要であったが、概ケーラー多様体に対しても類似のモーメント写像が定義できる事を示した。概ケーラー多様体においては積分可能条件が不要である分、ある意味むしろ簡単になることが分かった。

研究成果の概要（英文）：
The Kobayashi hyperbolicity is also defined for almost complex manifolds. Though analytical proofs of locally complete hyperbolicity for almost complex manifolds were known, we obtained a new differential geometric one.
The moment map of Kaehler manifolds are important since it is involved with the problem of stability. It is extended to the analogous one for almost Kaehler manifolds. We found that it becomes simpler in a sense for the almost Kaehler manifolds, since one does not need the integrability conditions.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
総　計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：微分幾何
科研費の分科・細目：数学・ 幾何学
キーワード：複素多様体、概複素多様体

１．研究開始当初の背景

近年概複素多様体も重要な研究対象として活発な研究が行なわれるようになってきた。

(1) 複素多様体に対して小林距離は次の様に定義される。p, q を複素多様体の２点とし、有限個の１次元単位円板からの正則写像の像となる点列でそれらを結んだとき、点列の単位円板での距離の和の下限を p, q 間の小林(擬)距離と呼ぶ。

(2) 概複素多様体間にも正則写像の概念は定義され、小林(擬)距離が定義される。　複素多様体のときと同様、小林(擬)距離が距離になるとき概複素多様体は双曲的、完備になるとき完備双曲的と呼ばれる。

(3) R. Debalme and S. Ivashkovich は複素 2 次元の概複素多様体の完備双曲性の問題を複素解析的な手法により考察し、特に局所完備双曲性が成り立つことを示した。　それを受けて小林は複素微分幾何学的手法により、複素 2 次元の結果は高次元の場合に拡張される事を予想した。

(4) 板東は偏微分方程式の解のアプリオリ評価という解析的な手法で、小林の予想は一般次元で成り立つことを示したが、複素微分幾何学的証明は得られていなかった。 しかし、そこで使われた手法は、各点の近傍で概複素構造を定数複素構造として延長し、概複素構造に対する正則写像の満たすコーシー・リーマン方程式を定数複素構造のコーシー・リーマン方程式の摂動として考えるという方法をとっていた。　その証明の微分幾何学化が問題となった。

(5) 双曲性の問題はいわば正則断面曲率の問題であるが、複素幾何学では正則断面曲率以外にもリッチ曲率等が重要な役割を担っている。　複素幾何学ではリッチ曲率が安定性の問題と関連付られているが、概複素多様体上では十分考察されているとはいえない。P. De Bartolomeis, G. Tian は概複素多様体上の概正則ベクトル束に対して安定性の概念を導入し、いわゆる小林-Hitchin 対応が概複素多様体においても成り立つことを示したが、概複素多様体自身に対する安定性は未解決である。　それに関連して、二木不変量やその拡張の様な安定性に関わる不変量を概複素多様体上にも拡張できるか等は興味深い問題である。

２．研究の目的

(1) 概複素多様体の小林双曲性の問題においては、板東やその後の解析的な研究でも、概複素構造を考える時、1 点での概複素構造をそのまま定複素構造として拡張し、概複素構造を定複素構造の摂動として見る手法が有用であった。 これは、座標の取り方に依存しており、そのまま幾何学化することは出来ない。　しかし、ある種接続的な構造が背後に働いているようにも考えられる。 そこで、接続の概念を用いて微分幾何学的に局所完備双曲性を示す事を考える。

(2) ケーラー多様体の安定性の問題では、アインシュタイン・ケーラー計量あるいは定スカラー計量はモーメント写像と関連して重要な役割を担っている。 そこで、概ケーラー多様体においてアインシュタイン・ケーラー計量・定スカラー計量とモーメント写像がどのような関係にあるかを調べる。

(3) 複素幾何学での知見を利用して概複素多様体上を研究するとともに、可能ならば複素幾何学へのフィードバックを試みる。

３．研究の方法

(1) 国内のみならず海外の研究者とも連絡を取り合って成果・知見の交換を行ない、できるだけ生の情報にふれる。

(2) 雑誌、書籍、論文集等により必要な情報を得る。

(3) 日本内外で行なわれる各種のセミナー、研究会等に出席して、それぞれの分野の成果の理解に努め、また専門家と意見・情報の交流を行う。

(4) 内外の専門家を招いてセミナーを行ない、特に重要あるいは詳しく知る必要のある情報の獲得を図る。

(5) メール等電子的な手段を活用して、情報・成果の交換を図る。

４．研究成果

(1) 複素多様体の場合の局所完備双曲性は複素座標による球によって実現されている。　球の局所完備双曲性を微分幾何学的に証明するにはポアンカレ計量を利用する。　ポアンカレ計量は完備計量であり、そのレビ・チヴィタ接続は負の正則断面曲率をもつ。　ターゲットが負の正則断面曲率を持つ正則写像に関するシュワルツの補題を利用すると、球の小林距離はポアンカレ計量以上であることが分かり、球の完備双曲性を得る。(実は等しい。)　ここで、レビ・チヴィタ接続は計量と複素構造を保ち、かつトージョンが 0 となることが有効に利用されている。

(2) 概複素多様体の場合、一般にはポアンカレ計量の様な標準計量は存在せず、また計量・複素構造を保ち、同時にトージョンが 0 となる接続は存在しない。　したがって、どのような計量・接続を利用すれば良いかが問題となる。

(3) 一点 p を固定する。　u を p で非退化な最小値 0 を与える関数とし、e を十分小さな正数とする。　このとき、p の近傍 u < e 上で d'd"+d"d'{-log(e - u)} で与えられる計量は完備となる。これをポアンカレ計量の代用として用いる。　概複素多様体の場合のレビ・チヴィタ接続の代用物はエーレスマン・リーバーマン接続で与えられることは小林によって示されている。　十分小な e に対し、上の計量の正則断面曲率は p の近くで負になる事は容易にわかる。　そこで、u = e の近傍でも、正則断面曲率が負になる事を示せばよい。　この時、u = e 近くの点 q において境界へ向かう方向では e の逆数倍、それ以外の方向では e の平方根の逆数倍で拡大して計算してやることにより、e に関して一様な評価の存在を示す事が出来る。　e --> 0 の極限では計量は本質的にポアンカレ計量に収束する事に注意して正則断面曲率の評価を得る。

(4) この議論は複素多様体の滑らかな強擬凸領域の境界での計量の評価にも利用できることに注意する。

(5) 小林双曲性はいわば負正則断面曲率の問題であるが、複素多様体において重要な系列として、負リッチ曲率のケーラー多様体、あるいは一般型代数多様体がある。　概複素多様体においてこれに類する多様体族は存在するか。また、測度小林双曲性との関係はどうなるか。　興味深い問題である。

(6) ケーラー多様体のモデュライ空間は、シンプレクティック形式を一つ固定し、それとコンパティブルな複素構造の全体を、シンプレクティック同型の "複素化" で割ることによって構成されると考えられる。　実際には、シンプレクティック同型の "複素化" は存在せずバーチャルなものと考えられる。しかし、シンプレクティック同型の作用に対し、モーメント写像が存在すれば、モーメント写像の 0 点集合をシンプレクティック同型で割ったものがモデュライ空間の代用とみなせる。　この構成を形式的に実行すると、モーメント写像はスカラー曲率で与えられ、モデュライ空間は定スカラー曲率をもつケーラー多様体で記述されることになる。　したがって、定スカラー曲率をもつこととケーラー多様体の安定性に関連があると考えられる。　実際、定スカラー曲率と安定性の関連については多くの研究が行なわれている。

(7) この構成を概複素多様体の場合に行なうとする。　シンプレクティック多様体を一つ固定し、シンプレクティック形式とコンパティブルな概複素構造の全体を考える。　シンプレクティック形式とコンパティブルな概複素構造が与えられると、エルミート計量が入り、エーレスマン・リーバーマン接続が定まり、その曲率のトレースを取ることによりスカラー曲率が定義される。シンプレクティック同型の作用に対するモーメント写像が形式的にスカラー曲率で与えられることが分かる。　したがって、定スカラー曲率をもつ概ケーラー多様体は良い性質を持つと考えられる。　しかし、その詳細は不明である。

(8) 概ケーラー多様体の場合の計算は、ケーラー多様体にも当てはまり、複素構造を固定して行なうよりも、むしろ計算は簡単である事が分かる。

(9) モーメント写像とスカラー曲率の関係は分かったが、ケーラーの場合と異なり、定スカラー曲率と安定性の関係は分かっていない。　概ケーラー構造は非常に柔軟で、概ケーラー多様体は非常に沢山存在する。　ケーラー多様体とは異なり、そのモデュライは無限次元空間となる。一方シンプレクティック同型は本質的にケーラーの場合と同様一つの関数で記述されている。　したがって定スカラー曲率だけでは条件が足りないのではないかとの疑いがある。　概ケーラー多様体に対する適切な安定性の概念は何かという問題が考えられる。

(10)　複素多様体においては正則関数や正則ベクトル束の正則切断、あるいはより一般に連接層の概念が用いられ、いわばコホモロジー的手法が非常に有効かつ重要な手段になっている。　しかし、概複素多様体においては、正則関数でさえ局所的にも存在しないのが一般である。したがってコホモロジー的手法は適応するのが難しい。　小林双曲性の問題はい

わばホモロジー的手法を扱っていると見なす事もできる。しかし、それが有効なのはリーマン面からの正則写像に限られる。　高次元からの正則写像はやはり一般には存在しない。　高次元ホモロジー的手法を開発して概複素多様体を研究できるかは興味深い問題である。　これが開発できれば、逆に複素多様体の研究に大いに役立つと思われる。　(5) にあげた問題はこの問題とも関連していると思われる。

5.　主な発表論文等
なし

６．研究組織

(1) 研究代表者
板東 重稔 (BANDO SHIGETOSHI)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：40165064