様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２４年５月２８日現在

機関番号：11301
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008～2010
課題番号：20540058
研究課題名（和文）　アレクサンドロフ空間上の最適輸送問題とリッチ曲率

研究課題名（英文）　Optimal mass transport on Alexandrov spaces and Ricci curvature

研究代表者
塩谷　隆（SHIOYA TAKASHI）
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：90235507

研究成果の概要（和文）：
アレクサンドロフ空間上に正値ラドン測度が与えられたとき、それがあるビショプ・グロモフの比較条件をみたし、空間が直線を含むとき、その空間は直線とある空間の直積に同相となることを証明した。これはチーガー・グロモールの分割定理の一般化となっている。
もう一つの成果として、非負リッチ曲率をもつ閉リーマン多様体の列が与えられて、その直径が一様に上に有界とするとき、ある k に対してラプラシアンの第 k 固有値が無限大へ発散するならば、第１固有値も無限大へ発散し測度の集中現象が起こることを証明した。

研究成果の概要（英文）：
We prove that given an Alexandrov space and a positive Radon measure on it, if the measure satisfies a comparison condition of Bishop-Gromov type and if the space contains a straight line, then the space is homeomorphic to the direct product of some space and the real line.　This is a generalization of the Cheeger-Gromall splitting theorem.
As another result, given a sequence of closed Riemannian manifolds of nonnegative Ricci curvature and with a uniform upper bound of diameter, if the k-th eigenvalue of the Laplacian of the manifold in the sequence is divergent to infinity, then the first eigenvalue is also divergent and the measure concentration happens.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	1, 300, 000	390, 000	1, 690, 000
2009 年度	900, 000	270, 000	1, 170, 000
2010 年度	1, 000, 000	300, 000	1, 300, 000
年度			
年度			
総　計	3, 200, 000	960, 000	4, 160, 000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：幾何学，測度距離空間，分割定理，体積の比較，測度集中

１．研究開始当初の背景

最適輸送問題とは，ある物体の集合を移動させる時にコストを最小にする問題である．最も単純な場合では，以下のように定式化される．m 箇所の地点 x_1,...,x_m にそれぞれ重量が a_1,...,a_m の砂が積んであったとする．ここで，a_i は正の実数とする．これらをトラックで運んで y_1,...,y_n の地点にそれぞれ重量が b_1,...,b_n となるようにしたい．ただし，総重量は移動前と移動後で同じでなければならないので，Σ_i a_i = Σ_j b_j と

仮定しておく．単位重量の砂を地点 x から地点 y へ運ぶコストを c(x,y)とする．x_i から y_j へ重量 w_ij だけ砂を運んだとすると，総コストは I(w) ≔ Σ_i,j w_ij c(x_i,y_j) (w ≔ (w_ij))となる．輸送前の状態から Σ_j w_ij = a_i (i = 1,...,m)が，輸送後の状態から ∑_i w_ij = b_j (j = 1,...,n)が成り立っていなければならない．この制約条件のもとで，I(w)を最小にするような w = (w_{ij})を求めよ，というのが最適輸送問題の一番簡単なものである．このような問題は，空間 X の上にコスト関数 c(x,y), x,y ∈ X,および全測度が等しい２つの測度 μ, ν が与えられたとき，μ から ν への移動コストを最小化する問題へと一般化され，Monge や Kantorovitch によって研究された．R^n 上の最適輸送問題の解は Monge-Ampere 方程式の解にも対応しており，解析学において様々な研究がなされてきた．

最近になり，Otto-Villani や Cordero-Erausquin-McCann-Schmuckenschlager らにより，最適輸送問題とリッチ曲率との関係が見出された．これを以下に説明する．リーマン多様体 M 上の確率測度全体の空間 P(M)を考える．M 上のコスト関数 c(x,y)として，距離関数の 2 乗の半分 c(x,y) ≔ d(x,y)^2/2 を考える．２つの測度 μ,ν ∈ P(M)に対して，μ から ν への最適輸送のコストを d_W(μ,ν)とおくと，(P(M),d_W)は距離空間となる．さらに，任意の μ，ν ∈ P(M)に対して，これらは長さが最短の曲線 γ:[0,l] → P(M)で結ばれ，γ の長さは d_W(μ,ν)に等しいことが分かる．すなわち，γは最短測地線であり，(P(M),d_W)は測地空間となる．ν_M ∈ P(M)を M のリーマン体積測度を総体積で割った測度としたとき，P(M)上の任意の測地線 γ に対して，ν_M からの γ(t)への相対エンロトピーが t に関して凸関数になっているということが，M のリッチ曲率が非負であることと同値となるのである．さらに，リッチ曲率がある定数以上ということに対応する条件も得られている．

これらの研究とは独立に，リーマン多様体の断面曲率が下に有界であることを距離空間（測地空間）に拡張した概念が研究されてきた．これは最初 A. D. Alexandrov によって導入され，Burago-Gromov-Perelman によって近代的な基礎が築かれた．今日このような空間は Alexandrov 空間と呼ばれている．曲率 κ 以上の Alexandrov 空間の定義は，まず測地空間であり，さらに任意の（最短測地線からなる）三角形△に対して，対応する辺の長さの等しい三角形△'を定曲率 κ の空間にとると，△の方が△’より細くなっていないということで定義する．リーマン幾何学において，多様体の収束・崩壊の研究は一つの主要なトピックであるが，断面曲率が下に有界なリーマン多様体の Gromov-Hausdorff 極限はもはや多様体にはならず，Alexandrov 空間となる．（体積がゼロに収束する Gromov-Hausdorff 収束を崩壊と呼ぶ．）このため，Alexandrov 空間の研究は多様体の収束・崩壊の研究と切っても切れない関係にある．また，最近の Perelman による幾何化予想の証明においても，多様体の崩壊と Alexandrov 空間が使われたことも記憶に新しい．このような理由から Alexandrov 空間の研究は重要視されているが，多様体の収束・崩壊の研究以前から，Alexandrov 空間はそれ自身に興味が持たれ脈々と研究されてきた歴史がある．

断面曲率が下に有界という仮定の代わりに，リッチ曲率が下に有界な多様体の収束・崩壊の研究は困難を極める．現在のところ，Cheeger-Colding による非常に難解な研究があるが，彼らは非崩壊の場合にはある程度よい結果を得たが，崩壊する場合には残念ながら十分な結果を得たとはいい難い．断面曲率の場合は，Alexandrov 空間の理解がリーマン多様体のより深い理解につながったことを考えると，リッチ曲率が下に有界な距離空間を定式化して研究することは非常に有益であると考えられる．しかし，リッチ曲率には断面曲率とは根本的に異なる現象がある．距離空間においてリッチ曲率が下に有界であることをうまく定式化することは簡単ではなく，長年の課題とされてきた．誰でも思いつく一つの定義は，Bishop-Gromov の体積の比較条件だが，この条件は弱過ぎてそれほどよい結果は導けなかった．そこで，Lott-Villani, Sturm は，上記の最適輸送問題の条件に着目して，それを測度距離空間上でのリッチ曲率の下限条件の定義としたのである．重要な性質として，この条件は Gromov-Hausdorff 収束で保たれることが分かっている．また，不完全ながらこれから Bishop-Gromov の不等式や，log-Sobolev 不等式が導かれることも分かっている．現在も非常に活発に研究が進展しているが，色々と困難な問題も山積している．一つの大きな問題として，自然なラプラシアンの定義が未だ見つかっていないことが挙げられる．リッチ曲率とラプラシアンは本来密月関係にあり，Cheeger-Colding の研究においても，極限空間に自然なラプラシアンが内在的に定義され，収束するリーマン多様体のラプラシアンがある自然な意味で極限のラプラシアンへ収束していることが証明された（深谷の予想の解決）．リッチ曲率が非負の測地空間の単純な例として，（任意の）有限次元ノルム空間があるが，これに対しても自然なラプラシアンの定義は不可能ではないかと思

われる．ラプラシアンはL^2エネルギー2次形式から導出されるが，これには内積が必要不可欠だからである．一方で Alexandrov 空間においては，ほとんど全ての点においてリーマン計量が存在して（大津・塩谷（研究代表者）の定理），それを元にしてラプラシアンを定義，研究することができた（桑江（研究連係者）・塩谷（研究代表者）・町頭）．

２．研究の目的

本研究の目標は測度距離空間や Alexandrov 空間のリッチ曲率の下限条件を多角的に研究することである．その結果として、リーマン多様体で知られた結果を測度距離空間や Alexandrov 空間へ拡張することができる．このような研究はリーマン多様体の研究の後追いという感が否めないと思う．しかし，今までにない視点からの新しい証明方法を開発することによって，よりリーマン多様体とリッチ曲率の理解が深まることになる．さらに，距離空間においてある性質を証明すると，ほぼ自動的に空間を摂動してもほとんど同じ性質が得られることがあるのも利点である．距離空間上の幾何解析の研究の特徴として，今まで微分形で知られていた式を全て積分形に書き直して解釈する必要がある．これは多くの場合非常に非自明であり，その際たる例がリッチ曲率の下限条件を最適輸送問題の言葉で書き直すことである．曲率テンソルは定義不可能で，リッチ曲率や断面曲率も普通の意味では存在しないが，それでも曲率が下に有界であるような幾何学性質をもっている．この様な条件の下でも，ラプラシアンの比較定理や log-Sobolev 不等式などの種々の重要な結果が得られるのは，ある意味，微妙なバランスの上に立っていると言えよう．
また，リッチ曲率は測度の集中現象とも密接な関係があるが，リーマン多様体の収束・崩壊現象の類似として，測度の集中現象とラプラシアンについて研究する．

３．研究の方法

毎年，研究会「確率論と幾何学」を開催し，国内外の研究者と研究交流をした．これにより，研究のアイディアを得たり，最新の研究動向を知ることができて，研究を推進する数々の知見を得た．また，各種，学会や研究集会へ出席することにより，研究の活性化を図った．

４．研究成果

以前の桑江・塩谷の研究により，Alexandrov 空間上でハウスドルフ測度に関して Bishop-Gromov の不等式（の無限小バージョン）からラプラシアンの比較定理が得られることが分かった．本研究において，この結果を重みつきの Alexandrov 空間へと拡張した．つまり，Alexandrov 空間上に与えられた正値ラドン測度 μ が Bishop-Gromov の不等式をみたすとき，ラプラシアンの比較定理を証明した．このためには，まず重みがμのディリクレ形式を構成する必要があったが，特異点がそのラドン測度について測度ゼロであることを証明し，チーガーの理論を用いることで，リップシッツ関数がμについてほとんどいたるところで微分可能であることを示し，重みが μ のディリクレ形式を構成した．また，そのディリクレ形式が距離関数との両立条件をみたすことも証明した．さらに，重みμのディリクレ形式に対して，劣調和関数の最大値原理を桑江の一般論から導いた．ラプラシアンの比較定理とこの最大値原理を用いて，チーガー・グロモールの方法により，分割定理を証明した．つまり，そのような Alexandrov 空間が直線を含むとき，空間が実数直線とある空間の直積に同相であることを証明した．
閉リーマン多様体の列が与えられたとき，もしあるkに対して，ラプラシアンの弟k固有値が無限大へ発散するならば，その列は k 点からなる集合へ集中することを証明した．さらに直径が一様に上に有界で非負リッチ曲率をもつ閉リーマン多様体の列の測度集中による極限は連結であることを証明した．これら２つを組み合わせることにより，直径が一様に上に有界で非負リッチ曲率をもつ閉リーマン多様体の列に対して，ラプラシアンの弟k固有値が無限大へ発散するならば，測度集中を引き起こし，弟１固有値が発散することが分かった．将来の課題として直径の有界性の条件を取り除くことを目指したい．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

1. T. Shioya, Collapsing three-manifolds with a lower curvature bound, Tohoku Mathematical Journal Centennial Issue, 査読有，掲載決定.
2. K. Kuwae and T. Shioya, A topological splitting theorem for weighted Alexandrov spaces, Tohoku Math. J. 63(2011), 59-76, 査読有.
3. K. Kuwae and T. Shioya, Infinitesimal Bishop-Gromov condition for

Alexandrov spaces, Probabilistic approach to geometry, 293-302, Adv. Stud. Pure Math., 57, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010, 査読有.
4. 塩谷 隆, Alexandrov 空間上の幾何解析, 日本数学会 数学 第６１巻(2009), no. 1, 1-20,査読有.
5. K. Kuwae and T. Shioya, Variational convergence over metric spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 360(2008), no. 1, 35-75, 査読有.

〔学会発表〕(計１１件)
1. 塩谷 隆, 「測度集中の幾何入門」, 「測度距離空間全体の空間の幾何」(連続講演), 勉強会「測度集中の幾何」, 2010 年 12 月 22 日～24 日, 東北大学.
2. 塩谷 隆, 「A splitting theorem for weighted Alexandrov spaces」, 2010 年 3 月 18 日, 幾何セミナー, ノートルダム大学, アメリカ合衆国サウスベント.
3. 塩谷 隆, 「Geometric analysis on Alexandrov spaces」, 2010 年 3 月 16 日, コロキウム講演, ノートルダム大学, アメリカ合衆国サウスベント.
4. 塩谷 隆, 「A splitting theorem for weighted Alexandrov spaces」, 第 5 回日中友好幾何学研究集会, 2010 年 1 月 30 日, 沖縄 OIST.
5. 塩谷 隆, 「Geometry of measure concentration」, 東海大学・幾何セミナー, 2009 年 9 月 22 日, 東海大学.
6. 塩谷 隆, 「Geometric aspect of measure concentration」, RISM 研究集会「保存則と幾何学的偏微分方程式とその応用」, 2009 年 6 月 10 日, 京都大学.
7. 塩谷 隆, 「A splitting theorem for weighted Alexandrov spaces」, リーマン幾何と幾何解析, 2009 年 2 月 21 日, 筑波大学.
8. 塩谷 隆, 「Collapsing three-manifolds under a lower curvature bound」, 日中友好幾何学研究集会, 2008 年 12 月 22 日, 中国天津.
9. 塩谷 隆, 「3 次元多様体の崩壊とポアンカレ予想」, グローバル COE キックオフミーティング, 2008 年 9 月 29 日, 東北大学.
10. 塩谷 隆, 「Geometric analysis on Alexandrov spaces」(4 回連続講演), ボレルセミナー：New approaches to curvature, 2008 年 8 月 25 日～28 日 レ・ディアブラレ, スイス.
11. 塩谷 隆, 「Geometric analysis on Alexandrov spaces」, Probabilistic approach to geometry, 2008 年 7 月 28 日, 京都大学.

〔図書〕(計１件)
1. 塩谷 隆, 重点解説 基礎微分幾何, SGC ライブラリ 70, 臨時別冊・数理科学, 2009 年, 204 頁.

６．研究組織
(1)研究代表者
塩谷 隆 (SHIOYA TAKASHI)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：90235507

(2)連携研究者
桑江 一洋 (KUWAE KAZUHIRO)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：80243814