様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年６月３日現在

機関番号：１２４０１
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008～2010
課題番号：２０５４００６３
研究課題名（和文） 熱核の一般断熱展開理論の研究と応用

研究課題名（英文） Study on the general adiabatic expansion theory for heat kernels and its some applications

研究代表者
長瀬 正義（NAGASE MASAYOSHI）
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：３０１７５５０９

研究成果の概要（和文）：熱核に関連した研究において一般断熱展開理論は有効で強力な働きをすることを明らかにした。特に、リーマンラプラシアンの与える熱核のあらゆる微分の漸近展開係数については、その理論に基づいたある公式を得た。その公式と微積分学の初等的知識だけを使って、漸近展開係数の列の任意高次項まで曲率係数を使った普遍多項式表示を具体的に導き得る。（従来の方法では高度な知識が必要でせいぜい数項の考察に留まっていた。） また、断熱展開と、物理学者の言う異常項との関連も見いだし、後者に関する興味深い公式を得た。

研究成果の概要（英文）：We clarified the usefulness and powerfulness of the general adiabatic expansion theory in studying some subjects related to the heat kernels. In particular, based on the theory we obtained a formula for the coefficients of the asymptotic expansion of every derivative of the heat kernel associated to the Riemannian Laplacian. In order to describe the coefficients explicitly up to an arbitrarily high order as universal polynomials built from the curvature, we need only a basic knowledge of calculus added to the formula. (The conventional method requires various kinds of profound knowledge so that only a few coefficients were investigated.） We found also a relation between the adiabatic expansion and certain anomalies which are often referred to by physicists, and introduced an interesting formula for the anomalies.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	1,000,000	300,000	1,300,000
２００９年度	1,400,000	420,000	1,820,000
２０１０年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：熱核、断熱展開、漸近展開

１．研究開始当初の背景

研究開始当時、当代表者は四元数スピン構造なる概念を得ていた（J. Math. Soc. Japan, 47, 1995, 93-119 に掲載)。その構造を持つ多様体は複素１次元射影空間をファイバーとするファイブレーションを自然に持ち、ト

ウィスター空間と呼ぶべきその全空間は自然にスピン構造を持つ（Comm. Math. Phys. 189, 1997, 107-126 等に掲載)。四元数スピン研究の道具として導入したのが、トウィスター空間の持つスピンの一般断熱展開理論であった（J. Func. Anal., 251, 2007, 680-737 に掲載）。この理論では、全空間を底空間方向に無限に引き延ばす（言い換えれば、ファイバー方向を１点に潰す）操作によって様々な不変量の本質的部分を引き出す。当時この操作による研究は緒に就いたばかりであり更なる研究を計画していた。

その理論が様々な場面で有用であろうことは当初から認識していた。特に、全空間が底空間に一致する設定での理論は熱核の断熱展開理論に相当し、一般的な設定での研究の前段階としてこの単純な設定での考察を当課題の主目的とした。設定は単純であるが、熱核の断熱展開の研究はそれの漸近展開係数の研究において非常に強力な手段となることが期待できた。当時広く用いられていた手段は Gilkey の不変式論（だけ）であり、新手法を開発しない限り更なる進歩は望めない段階にあると当代表者は考えていた。

２．研究の目的

簡潔に述べれば断熱操作とは、注目点の周辺で接続に関する正規枠を 1/ε 倍し正規座標の与える枠を ε 倍する操作である。ファイバーと直交する方向の正規枠等に関するそうした操作へと一般化も考えられる。断熱操作に関して次のような作業仮説を当代表者は持っている。

（作業仮説） ε をゼロに近づけると、凝縮してしまっていて観察できなかった対象の持つ様々な性質が、 ε の k/2 乗 (k = 0, 1, 2, ・・・）達に関する（断熱）展開式の係数列という形で顕在化する。

当研究課題では、以下の様々な場面でこの作業仮説が有用であり、断熱操作、断熱展開は強力な武器であることを明らかにすることを目標とした。

（１）カイラルアノマリー（右手系か左手系かに関する異常項）についての研究： この種の研究は、「研究課題：基盤（C）四元数スピン多様体のアノマリーの研究」（平成１４－１６年）（当代表者が代表）として実施した経緯がある。当時は断熱展開理論なるアイデアを手にする前であって、時期尚早な研究課題であり十分な結果を得るには至らなかった。そのアイデアを得て目指すべき作業仮説も明確化した現在が、カイラルアノマリー研究の好機である。既にいくつかの結果を得ており、更に研究を進める。

（２）リーマンラプラシアンに付随する熱核の漸近展開係数の研究： 背景欄に記したようにこの課題が当研究の中心であり、従来は Gilkey 不変式論に従って研究されていた。ただし、確かに、係数達は計量の曲率係数の多項式表示を持ち且つある種の基本普遍多項式達の一次結合で書き表せると Gilkey 理論は主張するが、その一次結合係数を決定する手法をその理論は提供しているわけではない。この点に研究が膠着状態にある原因がある。それぞれの漸近展開係数の計算にはそれぞれの工夫が必要であり、実際に具体的表示の得られている係数は最初の数項に留まっている。それら計算と比較して、我々の理論に基づく計算は非常に単純であろう。このことは四元数スピンの研究での一般断熱展開理論の働きより予想できたであり、端的には初等的微積分の知識だけを必要とする計算アルゴリズムを得られるであろうと考えた。

（３）球面上のリーマンラプラシアンに付随する熱核の漸近展開の研究：　球面上の関数や微分形式に作用する熱核に制限すると、我々の理論は非常に単純化し、熱核の種々微分の対角成分の各点に於ける漸近展開係数達の計算も又単純化する。係数達は Cahn と Wolf（リー群、対称空間、表現の理論による)、Polterovich（彼の得た公式、超幾何関数のある種の組み合わせ等式、ラプラシアンの固有値や重複度の一覧表による）によって実は既に計算されているが、彼らの得た公式は非常に複雑である。より単純な公式を得られるであろう。

３．研究の方法

それぞれの課題研究の根底には一般断熱展開理論がある。

（１）「カイラルアノマリーについての研究」について： この研究に関しては既に得られていた結果もあり更に考察を進めたが、３課題の中では最も遅れており、視点を変えた研究を予定している。現在までの研究は、主に二つの問題に集約できる。

① トウィスター空間上のディラック作用素のトレースと無限小変形カイラルアノマリーについて考察した。それらのある種の断熱展開式の係数について考察を進めた。

② 四元数スピン多様体上の随伴束の切断方向への（Bourguignon と Gauduchon の意味の）ディラック作用素の無限小変形と、それに付随するスーパーカイラルアノマリーの断熱展開について考察した。特に、展開式の初項の具体的表示を得て、高次の項についても考察を進めた。

（２）「リーマンラプラシアンに付随する熱核の漸近展開係数の研究」について： この研究に関しても、既に得られていた結果もあり更に考察を進めた。

① リーマン接続に関する正規枠や、正規座標の与える（座標）枠について考察した。目標欄で述べたようにそれらの 1/ε 倍、ε 倍が断熱展開の本質であり、正規枠と座標枠との変換関数の注目点に於ける断熱展開が考察の中心であった。Atiyah, Bott, Patodi による論文 On the heat equation and the index theorem (Invent. Math. 19, 1973, 279-330) の補遺を参考とした。一般断熱展開なるアイデアは、四元数スピン、カイラルアノマリーなどについての考察に加えてその補遺における考察から大きな影響を受けている。変換関数の研究は、リーマンラプラシアンだけでなく様々なラプラシアンについて進めた。

② リーマンラプラシアンの断熱展開について考察した。そのラプラシアンは、リーマン接続を使ったワイツェンベックの公式を持つ。① の研究は接続の断熱展開を導き、最終的にはラプラシアンの断熱展開を導く。

③ リーマンラプラシアンの断熱展開係数の具体的表示について考察した。② の考察よりその断熱展開は ε の k/2 乗（k = 0, 1, 2, ・・・）達に関する展開 となることが分かった。更に ε の k/2 乗の係数達は、労を厭わなければ ① の研究結果を使って延々と初等的に計算可能な量であることが分かった。当代表者は最初の数項を実際に筆記計算したが、計算のアルゴリズムは単純であって Mathematica などを使った機械計算も可能であることが分かった。

④ 熱核の漸近展開係数について考察した。熱核の局所化の議論によって、漸近展開係数と断熱展開係数との関係が明らかとなった。③の結果を使って漸近展開係数のいくつかを筆記計算し，アルゴリズムを明らかにして Mathematica を使った機械計算の準備を進めた。

（３）「球面上のリーマンラプラシアンに付随する熱核の漸近展開の研究」について： 関数に作用する熱核の研究については、既に一部結果を得ている。本質的に重要であったのは、球面と双曲空間との間に不思議な対応があること、後者については熱核の具体的表示が既に明らかにされていることであった。

① 球面及び双曲空間上の微分形式に作用する２つのラプラシアンの関係を考察した。球面、双曲空間それぞれについて、注目点の近傍において（係数部分が）その点からの距離のみに依存している微分形式に作用するラプラシアンが研究対象であった。関数に作用するそれらの間には「三角関数--双曲関数」対応（球面上のラプラシアンの表示に現れる sin を sinh に置き換えると双曲空間上のラプラシアンの表示を得る等の対応）がある。微分形式に作用するそれらについての同様な対応を検討した。

② 双曲空間上で微分形式に作用する熱核の具体的表示について考察した。波動核の具体的表示を求め Fourier 変換を用いて熱核のそれを求めると言う手順を採用した。

③ 「三角関数--双曲関数」対応に注意して球面上の熱核を調べた。関数に作用するそれでは熱核そのものの具体的表示を求めたが、微分形式に作用するそれについては指数減少項を無視してしかも対角成分の近傍において熱核を調べた。

４．研究成果

一般断熱展開理論は当代表者が四元数スピン研究の道具として導入したものであるが、当課題研究では他の題材、特に熱核に関連した研究においても有用な理論であることを明らかにした。一部の結果は発表済み論文や投稿中論文にまとめられており、更なる考察や結果について論文を準備中である。

（１）「カイラルアノマリーについての研究」について： トウィスター空間上のディラック作用素に関連するいくつかの（無限小）カイラルアノマリーについて、底空間方向に関する断熱展開やファイバー方向に関する断熱展開の展開係数の一部について具体的表示を導きその意味を明らかにした。この題材の研究に関しては、今後視点を変えて、トウィスター空間上のディラックラプラシアン（ディラック作用素の２乗）とリーマンラプラシアンに付随する二種類の熱核の関連を明らかにしていく予定である。それぞれはスピノール、テンソルの言葉で記述される。それら二つの言葉のどちらが世界を記述しているか古くからの議論があるが、一般断熱展開理論の観点からそれらの間の深い関係が明らかになりつつある。

（２）「リーマンラプラシアンに付随する熱核の漸近展開係数の研究」について： 一般断熱展開理論に基づいて、熱核のあらゆる微分の漸近展開係数に関するある公式を導いた。その公式と微分積分学の基礎知識だけを使って係数達の具体的表示を導くことが可能である。既存の手段（Gilkey 不変式論）は様々な深い知識を必要とし新規に参入するのは難しい研究分野であったが、我々の手段は本質的に単純で、筆記計算または機械計算によって延々と具体的表示を導き得る。当代表者はいくつかの項について筆記計算を実行して（Gilkey 不変式論による）既存の

結果と一致することを確かめた。今後、Mathematica を使った機械計算を計画している。また、他のラプラシアン、特に少々奇形な（楕円型ではない）ラプラシアンに関する研究も計画している。一般断熱展開理論の有用性は実はそうした研究において特に顕わとなる。

（３）「球面上のリーマンラプラシアンに付随する熱核の漸近展開の研究」について：標準球面上の関数や微分形式に作用する熱核の対角点に於けるあらゆる微分の漸近的挙動は、指数減少項を除いてある初等関数のそれらに一致することを明らかにした。奇数次元と偶数次元では様相は大分異なる。球面の熱核のトレースの漸近展開の係数達については過去様々な研究があるが、我々の結果より、それらは本質的に全て我々の得た初等関数の漸近展開の研究に帰着されることになる。それの微分の漸近展開の研究も同様に初等関数のそれに帰着されることも重要である。多様体の持つ様々な不変量は熱核の微分と深い関係にあり、球面については，結果的にそれら不変量の研究も又，初等関数の研究に帰着されることになる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① 長瀬正義, Expressions of the heat kernels on spheres by elementary functions and their recurrence relations, Saitama Math. J. Vol.27, 2010, 23--34（査読有り）
② 長瀬正義, The Laplacian and the heat kernel acting on differential forms on spheres, Tohoku Math. J. Vol.61, 2009, 571--588（査読有り）
③ 下川航也, 他, Finite surgeries on three-tangle pretzel knots, Algebr. Geom. Topol. Vol.9, 2009, 743--771（査読有り）

６．研究組織
(1)研究代表者

長瀬　正義（NAGASE MASAYOSHI）
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：３０１７５５０９

(2)研究分担者

(3)連携研究者

水谷　忠良（MIZUTANI TADAYOSHI）
埼玉大学・名誉教授
研究者番号：２００８０４９２
阪本　邦夫（SAKAMOTO KUNIO）
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：７００８９８２９
下川　航也（SHIMOKAWA KOYA）
埼玉大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：６０３１２６３３
福井　敏純（FUKUI TOSHISUMI）
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：９０２１８８９２