様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年５月１６日現在

機関番号：１２６０４
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008～2010
課題番号：２０５４００６５
研究課題名（和文）ストリング絡み目の自己 Cn 変形による分類とミルナー不変量に関する研究

研究課題名（英文）Cn-equivalence on string links and Milnor invariants

研究代表者
安原　晃　（YASUHARA　AKIRA）
東京学芸大学・教育学部・准教授
研究者番号：６０２５６６２５

研究成果の概要（和文）：自然数 1,2,…,m を項にもつ有限数列 I に対応して，m 成分ストリング絡み目のミルナー不変量 μ(I)が定義される．ここで，数列 I の中に同じ数が現れる回数の最大数を r(I)で表す事にする．数列 I の長さが k のとき，μ(I)を長さ k のミルナー不変量と呼ぶ．本研究では，r(I)≦2 である全てのミルナー不変量 μ(I)の値を共有するストリング絡み目の幾何的特徴付けを行った．また，６以下の自然数 k に対し，長さ k 以下のミルナー不変量の値を共有するストリング絡み目の幾何的特徴付けも与えた．

研究成果の概要（英文）：For any finite sequence I valued in {1,…,m}, Milnor invariant μ(I) for m-string links are defined. We denote by r(I) the maximal number of times which any index appears in I. We give a geometric characterization for string links which have same Milnor invariants μ(I) for any I with r(I) at most 2. And, for a natural number k which is at most 6, we give a geometric characterization for string links which have same Milnor invariants μ(I) for any sequence I with length at most k.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	1,200,000	360,000	1,560,000
２００９年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２０１０年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：位相幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：link, string link, Cn-move, self Cn-move, delta-move, self delta-move, Milnor invariant

１．研究開始当初の背景

3次元空間内の有限個の単純閉曲線の集合を絡み目という．特に1成分の絡み目を結び目という．結び目理論とは，絡み目（結び目）を研究対象とする位相幾何学の1分野であり，絡み目をアンビエント･イソトピーと呼ばれる同値関係で分類する問題は，結び目理論の起源から残っている大問題の１つである．アンビエント・イソトピーとは，直感的には，２つの絡み目が空間内の「連続的」な変形（切らずに伸ばしたり縮めたりして）で移りあうとき，同じであるとする同値関係である．アンビエント・イソトピーによる完全分類を与えることは，雲を掴むような話で，短期間の

研究対象にはそぐわない．従って，それよりも「粗い」同値関係を導入し，分類することが短期の研究目標としては現実的であり，このような研究を着実に進めることで，この大問題の解決に到達できるであろう．

この種の研究で，古くから知られていて，多くの研究者が関心を寄せてきたものとして，リンク・ホモトピーと呼ばれる同値関係による分類問題がある．これは，言わずと知れた大数学者Milnorの論文「Link groups, *Ann. of Math.*, 59(1954), 177--195」で定義された同値関係である．この論文の中でMilnor自身がリンク・ホモトピーに関する分類問題の部分解を与えている．その後，多数の研究者が完全解決を試みたが，最終的な決着は Habeger と Lin の共著論文「The classification of links up to link-homotopy , *J. Amer. Math. Soc.*, 3(1990), 389--419.」でようやく与えられた．

Milnor は先の論文とそれに続く論文「Isotopy of links. Algebraic geometry and topology. *A symposium in honor of S. Lefschetz,* pp. 280--306. *Princeton University Press, Princeton, N. J.,* 1957」の中で，Milnor 不変量（Milnor の$\bar{\mu}$不変量）と呼ばれる不変量を定義している．この不変量の詳しい定義は割愛するが，一般に，m 成分絡み目の Milnor 不変量$\bar{\mu}(I)$は m 以下の自然数を項にもつ有限数列 I に対応して定義される．ここで，数列 I の中に同じ数が現れる回数の最大数を r(I)で表す事にする．例えば，r(1,2,3,1)=2，r(1,2,3,2,3,4,2)=3 となる．

Habegger と Lin は絡み目のリンク・ホモトピー分類を与えた前述の論文の中で，ストリング絡み目という概念を導入した．ここで，ストリング絡み目とは，円柱の上・下の面に端点をもつ円柱内の単純曲線からなる集合である．Habegger と Lin は，まずストリング絡み目のリンク・ホモトピーに対しミルナー不変量（ストリング絡み目の場合は，$\bar{\mu}$ではなくμで表す）を定義し，更に以下の定理を示した．

定理：ストリング絡み目がリンク・ホモトピーで同値になる為の必要十分条件は，r(I)=1 となる任意の I に対しμ(I)の値が等しくなる事である．

同じ成分数の２つのストリング絡み目が与えられたとき，一方の円柱の下の面と，他方の円柱の上の面を張り合わせる事により，新しいストリング絡み目が得られる．ストリング絡み目はこの演算の下で半群になり．更に，ストリング絡み目のリンク・ホモトピー類の集合はべき零群になることが，Habegger と Lin によって示されている．これはストリング絡み目にのみ成立することで，絡み目では同様なことが成立しない．ストリング絡み目がもつこの特性は，多くの研究者の関心をひきつけ，Habegger と Lin の論文以降もストリング絡み目は多くの論文で取り扱われている．

２．研究の目的

本研究では，リンク・ホモトピーの一般化である自己 Cn 同値と呼ばれる同値関係を用いて，ストリング絡み目の分類を考察する．自己 Cn 同値は, n=1 の場合はリンク・ホモトピーである．更に，n が大きくなるほど細かな同値関係を与えるという優れた性質をもっている．また，研究代表者の最近の研究成果により，ストリング絡み目の自己 Cn 同値類の集合はべき零群になることもわかっている．

r(I)=1 ならば，ミルナー不変量$\bar{\mu}$(I)とμ(I)はリンク・ホモトピー不変量となることが知られているが, r(I)>1 の場合はリンク・ホモトピー不変量にはならない．研究代表者は，Thomas Fleming 氏との共同研究の中で, r(I)≦n であることが, 絡み目のミルナー不変量$\bar{\mu}$(I)が自己 Cn 同値の不変量であることの必要十分条件であることを示した．この結果は絡み目の場合にのみ与えられたもので，ストリング絡み目の場合の考察はされていない．そこで，次の予想が自然に浮かぶ．

予想：r(I)≦n であることが，ストリング絡み目のミルナー不変量μ(I)が自己 Cn 同値の不変量であることの必要十分条件である．

これに対して，絡み目の場合の結果の証明を改良する事により，肯定的な解答を与える．

Habegger と Lin の定理は, n=1 の場合は，ミルナー不変量が自己 C_1 同値分類を与える事を意味している．つまり，ミルナー不変量は自己 C_1 同値の完全不変量である．これまでの研究から, 推測できる事は，n≧3 の場合は完全には程遠く，n=2 の場合は完全であるか否かが微妙であるということである．

本研究では, 主に n=2 の場合に焦点をあてて研究を進める．

３．研究の方法

本研究は研究代表者が単独で行う．研究を行う上で，何人かの研究者と研究交流を図る．

数学の研究では「考える」ことが大部分を占める．数学における研究交流の意義は，異なる観点からの思考や新しい知識を得ることができることにある．

本研究における研究費の大部分は旅費として使用し，国内外の研究者と交流をはかることにより，研究の進展に役立てた．

主な研究交流は，以下の通りである．

（１）フランスのグルノーブル第１大学を訪問し同大学のジャン・バプテスト　メイヨン氏と研究交流をはかった．メイヨン氏とは，これまでにも幾つかの共同研究を行ってきた．メイヨン氏はミルナー不変量やクラスパー理論に関する知識が豊富で，今回の研究にも大いに役立った．

（２）アメリカのジョージ・ワシントン大学で開催された研究集会 Knots in Washington XXVII (3rd Japan-US workshop in knot theory)に参加し，研究成果の発表及び，参加者との研究交流を行った．

（３）ポーランドで開催された，研究集会 Knots in Poland III に参加し，研究発表及び，参加者との研究交流を行った．

（４）大阪工業大学に訪問し，同大学の渋谷哲夫氏や塚本達也氏と絡み目の局所変形やミルナー不変量に関する研究に関して意見交換を行った．

４．研究成果

上でも述べたように，自然数1,2,…,mを項にもつ有限数列Iに対応して, m成分ストリング絡み目のミルナー不変量μ(I)が定義される．ここで, 数列Iの中に同じ数が現れる回数の最大数をr(I)で表す事にする．

本研究では，リンク･ホモトピーより細かな同値関係として，自己Cn-同値を考え，この同値関係とミルナー不変量μ(I)との関係を調べた．自己Cn-同値は，n=1の場合はリンク･ホモトピーと一致し，r(I)=1の場合は，μ(I)がリンク･ホモトピー不変量となることが知られている．更に，ミルナー不変量はストリング絡み目のリンク･ホモトピー分類与えることも知られている．

本研究では，主に以下の成果を得た．

（１）以下の命題を示した．

命題：μ(I)が自己Cn-同値の下で不変量になる為の必要十分条件は，r(Ｉ)≦nである．

これと類似の結果は，絡み目に関しては，既に研究代表者によって証明されていたが，今回はストリング絡み目に関して，新たに結果を得た．

（２）コボルディズムという同値関係と自己Cn-同値を組み合わせることにより，自己Cnコボルダントという同値関係を定義し，次の結果を得た．

定理:ストリング絡み目が自己C_2コボルダントである為の必要十分条件は，r(I)≦2の全てのIに対して，μ(I)の値が一致する事である．

これにより，ミルナー不変量が自己 C_2コボルダントの完全不変量であることがわかる．

（３）自己C_2-同値は自己Δ-同値と呼ばれる同値関係に等しいことが知られている．絡み目の自己Δ-同値に関する結果として次を得た．

定理: 絡み目が自明な絡み目と自己Δ-同値になる為の必要十分条件は, r(I) ≦2である全てのミルナー不変量μ(I)が0になることである．

（４）数列Ｉの長さが kのとき，μ(I)を長さkのミルナー不変量と呼ぶ．長さ kのミルナー不変量は，ストリング絡み目の位数 $k-1$ の有限型不変量であることが知られていて，特に Ck 同値やコボルダントと呼ばれる同値関係の不変量になる．そこで，これらを組み合わせた新しい同値関係として，Ck コボルダントを定義して，ミルナー不変量との関係を調べる事により，次の結果を得た．

定理：kを６以下の自然数とする．各成分が自明な２つのストリング絡み目が Ckコボルダントである為の必要十分要件は，長さ k 以下のミルナー不変量が一致する事である．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）

①Teruhisa Kadokami and <u>Akira Yasuhara</u>, An estimation of the Ck-unknotting number for a Ck-trivial link,Kobe Journal of Mathematics,査読有, 27, 2010, 35―46

② Jean-Baptiste Meilhan and <u>Akira Yasuhara</u>, Characterization of finite type string link invariants of degree <5, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 査読有, 148, 2010, 439―472

③ Thomas Fleming, Tetsuo Shibuya, Tatsuya Tsukamoto and <u>Akira Yasuhara</u>, Homotopy, Delta-equivalence and concordance for knots in the complement of a trivial link, Topology and its Applications, 査読有, 157, 2010, 1215―1227

④Akira Yasuhara, Self delta-equivalence for links whose Milnor's isotopy invariants vanish, Transactions of the American Mathematical Society, 査読有, 361, 2009, 4712―4749

⑤ Akira Yasuhara, Classification of string links up to self delta-moves and Concordance, Algebraic & Geometric Topology, 査読有, 9, 2009, 265―275

⑥ Thomas Fleming and Akira Yasuhara, Milnor's invariants and self *Ck*-equivalence, Proceedings of the American Mathematical Society, 査読有, 137, 2009, 761―770

⑦ Jean-Baptiste Meilhan and Akira Yasuhara, On *Cn*-moves for links, Pacific Journal of Mathematics, 査読有, 238, 2008, 119―143

〔学会発表〕（計２件）
①安原　晃, Finite type invariants of string links and the HOMFLYPT polynomial of knots, Intelligence of Low-dimensional Topology, 2010 年 6 月 3 日, 京都大学数理解析研究所

② Akira Yasuhara, Classification of string links up to self delta-moves and concordance, Knots in Washington XXVII (3rd Japan-USA Workshop in Knot Theory), 2009年1月10日, George Washington University, USA

６．研究組織
(1)研究代表者
　安原　晃（YASUHARA　AKIRA）
　東京学芸大学・教育学部・准教授
　研究者番号：６０２５６６２５