

自己評価報告書

平成 23 年 4 月 19 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2011

課題番号：20540069

研究課題名（和文） 偏極代数多様体に対する小林・ヒッチン対応とケーラー・リッチ流

研究課題名（英文） Kobayashi-Hitchin correspondence for polarized algebraic manifolds and Kähler-Ricci flows

研究代表者

中川 泰宏 (NAKAGAWA YASUHIRO)

金沢大学・数物科学系・准教授

研究者番号：90250662

研究分野：複素微分幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：Einstein-Kähler 計量, 幾何学的不変式論, 安定性, Einstein-佐々木計量

1. 研究計画の概要

最近の Tian・Donaldson・満洲等の研究により、定スカラー曲率 Kähler 計量の存在と偏極代数多様体の安定性との関係（いわゆる「多様体に対する小林・Hitchin 対応」）について、少しずつではあるが状況がはっきりしてきつつある。そこで、この関係をより精密なものとし、Einstein・Kähler 計量の存在と同値であるような Fano 多様体の安定性の概念を構成したい。さらに、この安定性を一般の偏極代数多様体の安定性にまで拡張して考えたい。またその対応において、定スカラー曲率 Kähler 計量の一般化である端的 Kähler 計量や Kähler・Ricci ソリトン、さらには Einstein・佐々木計量がどのような位置付けとなるかも決定したい。

2. 研究の進捗状況

まず「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」において、重要な役割を演じている K エネルギーの観点から、Einstein・Kähler 計量の一般化である、Kähler・Ricci ソリトンを反標準類とは限らない一般の Kähler 類の場合に一般化することに成功し、さらにその非自明な例を構成した。この一般化された Kähler・Ricci ソリトンの非自明な例の構成は、複素射影直線上のある正則直線束のコンパクト化において全ての Kähler 類上で構成した。

次に、Einstein・佐々木計量について考察した。Einstein・佐々木計量は Fano 多様体上の Einstein・Kähler 計量および Ricci 平

坦な Kähler 計量と深く関係しており、また数理物理学からの要請で、ここ数年多方面において深く研究されている。特にトーリック佐々木多様体の場合は深く研究されていて、二木・小野・Wang・趙等により Einstein・佐々木計量の構成とその一意性が示された。そこで本研究では、トーリックでない Einstein・佐々木計量の例の構成を考えた。具体的には、Einstein・Kähler 多様体上の複素射影直線束の標準束に付随した単位円周束上に Einstein・佐々木計量を構成した。すなわち、Einstein・Kähler 多様体上の複素射影直線束上に Einstein・Kähler 計量を常微分方程式を解くことにより構成した坂根・小磯・満洲等の方法を拡張してやり、ある条件の下で横断的 Einstein・Kähler 計量を構成して、最終的には仮定した条件が成立するようにうまく Reeb 場を選ぶことにより Einstein・佐々木計量を構成した。

3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

(理由)

最終目標である「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」の解決には至っていないが、そもそもこの問題は大変重要かつ難しい問題であるので、今すぐの解決は望むべくもないであろう。しかし、「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」の周辺に位置し、この問題の解決において大変重要な役割を演じるであろう Kähler・Ricci ソリトンや Einstein・佐々木計量に対する知見

がずいぶんと深まったので、当初想定していた研究成果は順調に得られていると思われる。

4. 今後の研究の推進方策

主に Fano 多様体上の Kähler・Ricci ソリトンの存在問題について考える。現在のところ知られている Kähler・Ricci ソリトンは小磯により構成された, Einstein・Kähler 多様体上のある種の射影直線束の上の Kähler・Ricci ソリトンと, Wang・Zhu により構成された トーリック Fano 多様体上の Kähler・Ricci ソリトンぐらいである。Kähler・Ricci ソリトンを理解するには, まだ例が少ないと思われるので, まずは Kähler・Ricci ソリトンの構成を考えたい。具体的には, Einstein・Kähler 多様体上のある種のトーリック多様体束の上に Kähler・Ricci ソリトンを構成したい。これは, 小磯の結果の高次元化とも考えられるし, Wang・Zhu の結果の相対化とも考えることができる。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

- ① Y. Nakagawa, On generalized Kähler-Ricci solitons, Osaka J. Math. 48(2011), 査読有, 掲載予定.

[学会発表] (計 2 件)

- ① 中川泰宏, New examples of Sasaki-Einstein manifolds, Seminar on Complex Manifolds in Kumamoto, 2011 年 1 月 11 日, 熊本大学 (熊本県) .
- ② 中川泰宏, New examples of Sasaki-Einstein manifolds, The 16th International Symposium on Complex Geometry, 2010 年 10 月 20 日, 信州菅平プチホテルゾントック (長野県) .

[その他]