様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　24 年　5 月　11 日現在

機関番号：１３３０１
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2008～2010
課題番号：20540069
研究課題名（和文）偏極代数多様体に対する小林・ヒッチン対応とケーラー・リッチ流

研究課題名（英文） Kobayashi-Hitchin correspondence for polarized algebraic manifolds and Kähler-Ricci flows

研究代表者
中川　泰宏　（NAKAGAWA　YASUHIRO）
金沢大学・数物科学系・准教授
研究者番号：90250662

研究成果の概要（和文）：
まず，Einstein・Kähler 計量の一般化である，Kähler・Ricci ソリトンを反標準類とは限らない一般の Kähler 類の場合に一般化することに成功し，さらにその非自明な例を構成した．次に，トーリックでない Einstein・佐々木計量の例の構成を考えた．具体的には，Einstein・Kähler 多様体上の複素射影直線束の標準束に付随した単位円周束上に Einstein・佐々木計量を構成した．

研究成果の概要（英文）：
Firstly, we have generalized the notion of Kähler-Ricci solitons to the case of general polarized manifolds, which are called “generalized Kähler-Ricci solitons”. Moreover, we have constructed a non-trivial example of a generalieze Kähler-Ricci soliton. Next, we have constructed new examples of non-toric Einstein-Sasaki manifolds, that is, we have constructed Einstein-Sasaki metrics on certain unit-circle bundles associated to the canonical line bundles of projective line-bundles over Kähler-Einstein Fano manifolds.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：複素微分幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：Einstein-Kähler 計量，幾何学的不変式論，安定性，Einstein-佐々木計量

１．研究開始当初の背景

Kähler 多様体上の正則ベクトル束に Einstein・Hermitian 計量と呼ばれる良い計量が存在することと，その正則ベクトル束が Mumford・竹本の意味で安定であることが同値であるという結果が１９８０年代に小林・Lübke・Donaldson・Uhlenbeck・Yau らによって示され,「小林・Hitchin 対応」として知られている。この結果により，正則ベクトル束のモジュライ空間を微分幾何学的に研究することが可能となった.

同様に偏極代数多様体のモジュライ空間の問題を考えると，偏極代数多様体上に定スカラー曲率 Kähler 計量が存在することと，その偏極代数多様体が幾何学的不変式論の意味で安定であることとが，同値であることが期待される．これがいわゆる「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」である.

この予想を肯定的に示すことができれば，代数幾何学における重要な研究対象である，偏極代数多様体のモジュライ空間を微分幾何学の手法を用いて研究することが可能となる．例えば，Gromov 等により研究が進められている Riemann 多様体の崩壊に関する理論等を用いることができるかもしれない.

しかし，幾何学的不変式論の枠組みではいろいろな安定性を考えることができるので,「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」を考えるときに，どの安定性を採用すべきかということがまず問題となる.

最近の Tian・Donaldson・満渕等の研究により,「多様体に対する小林・Hitchin 対応」について，少しずつではあるが状況がはっきりしてきつつある． そこで，以下のような問題を考えるに至った.

(1) この関係をより精密なものとし，Einstein・Kähler 計量の存在と同値であるような Fano 多様体の安定性の概念を構成したい.

(2) さらに，この安定性を一般の偏極代数多様体の安定性にまで拡張して考えたい.

(3) またその対応において，定スカラー曲率 Kähler 計量の一般化である端的 Kähler 計量や Kähler・Ricci ソリトン，さらには Einstein・佐々木計量がどのような位置付けとなるかも決定したい.

２．研究の目的

本研究では「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」をより深くかつ正確に理解し，さらにはその解決を目指した．実際には,「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」の解決は非常に難しくかつ重要な問題なので，まずは幾何学的不変式論の枠組みにおいて，どのような安定性を考えるのが良いのかということから考察していき，その安定性の下で,「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」を，部分的な形ででも良いので示すことを目指した．また，その枠組みの中で定スカラー曲率 Kähler 計量の一般化にあたる端的 Kähler 計量がどういった位置付けになるかを判明させることを目指した.

一方，Donaldson・Uhlenbeck・Yau による元々の正則ベクトル束の場合の「小林・Hitchin 対応」の解決においては，熱流の方程式が非常に重要な役割を演じた．Ricci 曲率に関連した方程式としては，Perelman に

よる Poincaré 予想の解決に用いられた Ricci 流の方程式がある．この Ricci 流の方程式は近年盛んに研究され，いろいろな問題において成功を修めている．

そこで，本研究では Kähler・Ricci 流の方程式を深く研究することにより，「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」の解決を(部分的な形でも良いので)目指した．また，この方針での研究がうまく進めば，Einstein・Kähler 計量の一般化である Kähler・Ricci ソリトンおよび，その一般の偏極への一般化(これを「一般化された Kähler・Ricci ソリトン」と呼ぶことにする)が幾何学的不変式論における安定性からの観点において，どのような位置付けになるかも判明させることを目指した．

３．研究の方法

（１）まず「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」において，重要な役割を演じている K エネルギーの観点から，Einstein・Kähler 計量の一般化である，Kähler・Ricci ソリトンを考察し（このとき，考えている Kähler 類は反標準類となる)，Kähler・Ricci ソリトンを反標準類とは限らない一般の Kähler 類の場合に一般化することに成功した．この問題は元々は Tian により考察されたものであるが，彼の定式化には少し問題があった．よって，その問題をうまく回避するような定式化を考案した．

さらにこの一般化された Kähler・Ricci ソリトンの非自明な例を構成した．

（２）次に，　トーリックでない Einstein・佐々木計量の構成した．具体的には，ある種の Einstein・ Kähler 多様体上の複素射影直線束の標準束に付随した単位円周束上に Einstein・佐々木計量を構成した．これは Einstein・ Kähler 多様体上の複素射影直線束上で，常微分方程式を解くことにより Einstein・ Kähler 計量の存在を示した坂根・小磯・満渕等の方法を我々の場合に展開してやり，最終的には Reeb 場をうまく選ぶことにより Einstein・佐々木計量を構成した．

ここ数年では，トーリック Einstein・佐々木多様体に対する研究が盛んであり，いろいろな結果が得られている．一方，トーリックでない Einstein・佐々木多様体は，その例ですらあまり知られていないようである．我々の構成した Einstein・佐々木多様体は一般的にはトーリックとはならず，実際にトーリックでないものを含んでいる．

４．研究成果

（１）まず「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」 において，重要な役割を演じている K エネルギーの観点から，Einstein・Kähler 計量の一般化である，Kähler・Ricci ソリトンを反標準類とは限らない一般の Kähler 類の場合に一般化することに成功した．

この問題は元々は Tian により考察されたものであるが，彼の定式化には少し問題があった．実際、考えている Kähler 類を定数倍してやると，一般化された Kähler・Ricci ソリトンでなくなってしまうという問題である．よって，その問題をうまく回避するような定式化を考案した．

さらに，この一般化された Kähler・Ricci ソリトンの非自明な例を構成した．この非自明

な例の構成は，複素射影直上のある正則直線束をコンパクト化した空間を考えて，その上において全ての Kähler 類で構成した．

尚，２００８年度の実績報告書において，底空間が高次元の複素射影空間の場合に拡張することに成功したと報告したが，その後の研究より，高次元化には様々な困難があり，うまくいっていないことが分かった．底空間の高次元化，および一般の Einstein・Kähler 多様体への一般化は今後の課題の一つである．

（２）次に，Einstein・佐々木計量の例を構成した．具体的には，Einstein・Kähler 多様体上の正則直線束をコンパクト化して得られる複素射影直線束の標準束に付随した単位円周束上に Einstein・佐々木計量を構成した．この構成は，Einstein・Kähler 多様体上の正則直線束をコンパクト化して得られる複素射影直線束上に Einstein・Kähler 計量を常微分方程式を解くことにより構成した坂根・小磯・満渕等の方法の拡張である．すなわち，ある条件の下で横断的 Einstein・Kähler 計量を常微分方程式を解くことにより構成して，最終的には仮定した条件が成立するようにうまく Reeb 場を選ぶことにより Einstein・佐々木計量を構成した．

ここ数年では，トーリック Einstein・佐々木多様体と呼ばれるトーラス作用を許容したものに対する研究が盛んであり，いろいろな結果が得られている．一方，トーリックでない Einstein・佐々木多様体は，その例ですらあまり知られていないようである．我々の構成した Einstein・佐々木多様体は一般的にはトーリックとはならず，実際にトーリックでないものを含んでいる．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 1 件）

① <u>Y. Nakagawa</u>, On generalized Kähler-Ricci solitons, Osaka J. Math. 48(2011), 497 ― 513, 査読有.

〔学会発表〕（計 2 件）

① <u>中川　泰宏</u>, New examples of Sasaki-Einstein manifolds, Seminar on Complex Manifolds in Kumamoto, 2011 年 1 月 11 日，熊本大学(熊本県)

② <u>中川　泰宏</u>, New examples of Sasaki-Einstein manifolds, The 16th International Symposium on Complex Geometry, 2010 年 10 月 20 日,信州菅平プチホテルゾンタック(長野県)

６．研究組織

(1)研究代表者

中川 泰宏　(NAKAGAWA YASUHIRO)

金沢大学・数物科学系・准教授

研究者番号：９０２５０６６２

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし