

機関番号：14503

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20540075

研究課題名（和文） 特異点の種々の同値関係の相互関係の総合的研究

研究課題名（英文） Synthetic research on the relationship among various equivalence relations of singularities

研究代表者 小池 敏司 (KOIKE SATOSHI)

兵庫教育大学・大学院学校教育研究科・教授

研究者番号：60161832

研究成果の概要（和文）：実解析的特異点の望ましい同値関係として、T.C. Kuo により、ブロー解析同値の概念が導入されている。本研究では、2変数関数の場合には、 C^1 同値がブロー解析同値を導くことを示した。これは、Kuo や他の実特異点研究者達の予想に対する否定的な結果である。また、ブロー解析同値はリプシッツ同値を導かないことを示すために導入したりリプシッツ不変量を一般化し、一般の実閉体上のオーミニマル構造の定義可能集合の接方向次元がリプシッツ不変量になることを示した。

研究成果の概要（英文）：T.C.Kuo introduced the notion of blow-analytic equivalence as a desirable equivalence relation for real analytic singularities. In this research, we have proved that C^1 equivalence implies blow-analytic one. This is a negative result to the conjecture given by Kuo and other many real singularitists. In addition, we have proved that the directional dimension of definable sets in o-minimal structure over general real closed field is a Lipschitz invariant, generalizing the Lipschitz invariant I introduced in order to show that blow-analytic equivalence does not always imply Lipschitz one.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分トポロジー、特異点論

1. 研究開始当初の背景

私達の身の回りの多くの現象は、特異点における挙動としてモデル化される。もし、私達の周りの日常行動を決定するいくつかの要因があるのなら、その要因で定まるポテンシャル関数の極値（特異点）の選択に従い、

それらは行動することになるからである。このように、特異点は数学を越えた広い範囲の分野に応用を持つと同時に、数学の多くの分野においても重要な意味を持つ概念でもある。数学的には、集合の滑らかでない点としてや、写像の正則でない点として定義される。

本研究で行うことは、その特異点における種々の同値関係の相互関係についての総合的な研究を行うことであった。特異点が同じであるかどうかの同値関係としては、座標変換などの同値関係、つまり、 C^1 同値、 C^2 同値、...、連続的無限回微分同値、扱う空間が解析的ならば解析同値、といったものが一般に取り扱われて来た。また、位相的な量を保存する位相同値、解析的な量を保存するリプシッツ同値なども、特異点の同値関係として多くの分野で取り扱われてきた。

一方、20数年前に、シドニー大学の T.C. Kuo 氏により、実解析的特異点に対する望ましい同値関係としてブロー解析同値の概念が導入された。その後、オーストラリア特異点研究者だけでなく日本人特異点研究者の多くの貢献もあって、その分野はブロー解析理論として発展して来ている。

2. 研究の目的

前節で述べた実解析関数がブロー解析同値であるとは、それらの関数の位相同値を与える位相同型写像が、実改変と呼ばれる関数の零点集合の特異点解消のもと解析同型写像から誘導されるときにいう。従って、ブロー解析同値は解析同値より弱い、位相同値より強い同値関係であることが定義より直ちに従う。Kuo 氏ならびにほとんどのブロー解析理論研究者は、ブロー解析同値と C^r 同値 (r は有限) は独立な概念であろうということ、また、ブロー解析同値はリプシッツ同値を導くであろうとの予想を出していた。後者の予想については、研究代表者が、関数としてのブロー解析同値が零点集合のリプシッツ同値でさえ誘導しないことを実証する例を構成して、予想が正しくないことを示している。一方、前者の予想については、20年間あまり、正しいであろうとの予想のま

ま、手がつけられていなかった。

研究課題の「特異点の種々の同値関係の相互関係の研究」という観点から、本研究の目的は以下の問題について研究を行うことであった：

(1) 上記の後者の予想の逆問題：リプシッツ同値はブロー解析同値を導くか。

(2) 前者の予想が正しいことを示す例を構成できるか。

(3) 前者・後者の予想を示すために用いられた道具や手法、結果をより一般化することができるか。

3. 研究の方法

各問題に対する研究方法を、問題ごとに述べることにする。

(1) 海外協力研究者の A. Parusinski 氏により、リプシッツ同値を示すための自明性定理やリプシッツ不変量が導入されている。また、研究代表者と Parusinski 氏により、2変数実解析関数のブロー解析同値に対するツリーモデルや特異点解消グラフを用いた完全な特徴づけがなされている (雑誌論文①)。これらの結果を道具として、Parusinski 氏と共同で2変数の場合の問題に取り組む。

(2) 研究代表者は、前者の予想は間違っているという予想を持っていた。つまり、 C^1 値はブロー解析を導くという予想である。この元の予想は間違っているという私の予想を証明するために、(1) で述べたブロー解析同値の判定法を道具として、Parusinski 氏と共同で取り組む。

(3) 研究の目的欄で述べたように、後者の予想に対しては、研究代表者により、予想の反例が構成されていた。そのとき用いた手法をより一般的に開発することにより、海外研究協力者の L. Paunescu 氏と一緒に、部分解析的集合の接方向次元がリプシッツ不変量になることを示した (雑誌論文④)。この結

果を一般の実閉体上のオーミニマル構造の定義可能集合の問題に一般化することを、実代数幾何学やオーミニマル構造の分野の手法、道具を用いて、Paunescu 氏達と共同で取り組む。

4. 研究成果

上と同様に、各問題に対する研究成果を、問題ごとに述べることにする。

(1) の問題については、リップシッツ同値だがブロー解析同値ではないことを実証する 2 変数多項式関数の例を構成した。一方、

(2) の問題については、2 変数解析関数の場合に、 C^1 同値はブロー解析同値を導くことを示し、Kuo 達の予想が間違っていたことを証明した。これらの (1)、(2) の問題に関する結果は、Parusinski 氏との共著論文（その他の論文②）として書き上げ、現在、雑誌に投稿中である。

(3) の問題については、上記の研究の方法欄 (3) で触れた、一般の実閉体上のオーミニマル構造の定義可能集合の場合への一般化を、Paunescu 氏、連携研究者の塩田昌弘氏、Ta Le Loi 氏との 4 人の共同研究として成し遂げた。この結果については、4 人の共著論文（その他の論文③）として書き上げ、これも雑誌に投稿中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① S. Koike and A. Parusinski, Blow-analytic equivalence of two variable real analytic function germs, 査読有, Journal of Algebraic Geometry, 19, 2010, 439-472.
- ② S. Koike and A. Parusinski, Some questions on the Fukui numerical set for complex function germs, 査読有,

Demonstratio Mathematica, XLIII, 2010, 285-302.

- ③ 小池敏司, 実体上の接方向的性質の実閉体上への一般化, 査読無, 数理解析研究所講究録, 1707, 2010, 87-95.
- ④ S. Koike and L. Paunescu, The directional dimension of subanalytic sets is invariant under bi-Lipschitz homeomorphisms, 査読有, Annales de l'Institut Fourier, 59, 2009, 2445-2467.

[学会発表] (計 6 件)

- ① Satoshi Koike, Tarski-Seidenberg's type theorem in (SSP), Geometry Workshop, 2011 年 1 月 5 日, The University of Sydney.
- ② Satoshi Koike, Blow-analytic equivalence of two variable real analytic function germs, 54th Annual Meeting of the Australian Mathematical Society, 2010 年 9 月 27 日, The University of Queensland.
- ③ 小池敏司, ナッシュ級のイソトピー補題と応用, 福田拓生先生退職記念研究集会「可微分写像の特異点」, 2010 年 7 月 21 日, 日本大学.
- ④ Satoshi Koike, Various blow-analytic invariants of real analytic singularities, 第 5 回代数・解析・幾何セミナー, 2010 年 2 月 16 日, 鹿児島大学.
- ⑤ 小池敏司, 実閉体上のオーミニマル構造の定義可能集合の接方向的性質, 数理解析研究所研究集会, 2009 年 12 月 8 日, 日本大学
- ⑥ Satoshi Koike, Equisingularity problem on real algebraic singularities, The 3rd Australian-Japanese Workshop on Real and Complex

Singularities, 2009 年 9 月 18 日, The University of Sydney.

- ⑦ 小池敏司, 実解析的特異点のブロー解析理論における最近の進展, 第 55 回トポロジーシンポジウム, 2008 年 8 月 9 日, 金沢文化ホール.

[図書] (計 2 件)

- ① L. Paunescu, A. Isaev, A. Harris, T. Fukui, S. Koike (編), Australian National University, The Japanese-Australian Workshop on Real and Complex Singularities JARCS III, 2010, 174.
- ② S. Koike (編), Kyoto University, The second Japanese-Australian Workshop on Real and Complex Singularities (RIMS Kokyuroku 1610), 2008, 128.

[その他]

以下のホームページ

<http://www.sci.hyogo-u.ac.jp/koike/>

に、次のプレプリントの PDF ファイルを置いている。

- ① S. Koike, Finite theorem for Blow-semialgebraic triviality of a family of 3-dimensional algebraic sets.
- ② S. Koike and A. Parusinski, Equivalence relations for two variable real analytic function germs.
- ③ S. Koike, Ta Le Loi, L. Paunescu and M. Shiota, Directional properties of sets definable in o-minimal structures.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小池 敏司 (KOIKE SATOSHI)
兵庫教育大学・大学院学校教育研究科・教授
研究者番号 : 60161832

(2) 研究分担者

福井 敏純 (FUKUI TOSHIZUMI)
埼玉大学・理学部・教授

研究者番号 : 90218892

(3) 連携研究者

塩田 昌弘 (SHIOTA MASAHIRO)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号 : 00027385