

機関番号：15501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540079

研究課題名(和文) マグネティックグラフを用いた結び目の不変量に関する研究

研究課題名(英文) A study on invariants for knots derived from the magnetic graph

研究代表者

宮澤 康行 (MIYAZAWA YASUYUKI)

山口大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：60263761

研究成果の概要(和文)：マグネティックグラフと呼ばれる結び目の概念を拡張したグラフを用いて、結び目並びに仮想結び目に対し新しい多項式不変量を複数構成し、それら多項式不変量が結び目や仮想結び目の分類において大変有効であることを示した。さらに、それら多項式不変量の性質を調べることによって、いくつかの幾何学的不変量との関係を見つけた。それは、結び目や仮想結び目の構造を解明することにつながる重要な結果であると考えられる。

研究成果の概要(英文)：By using a graph diagram called a magnetic graph diagram which is a generalization of a knot diagram, we constructed a few new polynomial invariants for classical and virtual knots and showed that these polynomial invariants are very useful in classifying classical and virtual knots. Moreover, we found relationships between those invariants and a few geometric invariants by investigating properties of their invariants. They are important results which lead to analyze the structure of classical and virtual knots.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
年度	0	0	0
年度	0	0	0
総計	1,800,000	540,000	2,340,000

研究分野：結び目理論

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何, 結び目理論

1. 研究開始当初の背景

結び目理論の主要研究課題は結び目の分類である。結び目の分類問題を考える場合、有用かつ重要なものとして不変量があげられる。陳腐な言い方をすれば不変量は研究のための単なる道具にすぎないが、Alexander 多項式や Jones 多項式を考えてみれば分かることであるが、それらが結び目理論の発展に寄与した役割は計り知れないものがある。また、現在でも不変量は一般的に研究に有効

な手段として活用されている。それ故、不変量研究は分類問題の解決に必要なものと言えるだろう。

結び目を拡張した概念に空間グラフがある。研究対象が結び目であっても、空間グラフに考察の対象を広げることで、結び目だけに制限していたときには不明であった結び目の特徴や性質等に言及できることが多々ある。従って、研究対象の概念をより一般化することが時として有効な手段と成り得ることが

分かる。
安易ではあるが、上記 2 つの事柄を融合し、より大局的な見地に立ち不変量を用いて問題を考察すれば、結び目理論の研究を進展させるのではないかという推測が成り立つ。以上のようなことが、この研究課題の背景であり、研究を行うための動機である。

2. 研究の目的

本研究の目的はマグネティックグラフを通して結び目理論・仮想結び目理論を探究、調査することである。

マグネティックグラフとは、簡潔に表現すると、各成分が次数 2 の頂点を偶数個有し、辺に向きが付けられている空間グラフのことであり、結び目を拡張した概念である。同様に仮想結び目に対し拡張された概念として仮想マグネティックグラフが定義される。ここでは、これら 2 つのグラフをまとめてマグネティックグラフと呼ぶことにする。

マグネティックグラフを導入するという事は、「研究開始当初の背景」の項で述べた大局的な見地から考察するという事を実現するためである。

研究代表者によってマグネティックグラフを用いて開発・構成されていた結び目・仮想結び目に対する多項式不変量や新たに定義される新しい多項式不変量に焦点を当て、調査・探究し、多項式不変量の性質・特徴を把握すること、さらにその情報を基にして結び目や仮想結び目の分類や他の不変量の構造解明を行うこと、また、他の不変量の解析から研究対象の多項式の構造解明へのアプローチをすること、得られた研究成果を関連する位相幾何学分野、さらには、数学の他分野へ応用することを目指す。

特に、現時点で応用例として実現させたい課題は、マグネティックグラフの概念を用いて空間グラフの一種であるシータ曲線に対する不変量、より正確には、結び目の **Kauffman** 多項式に相当するような多項式不変量の構成である。

3. 研究の方法

研究目的を達成するため、大きく 2 つの観点から研究を実施する。

1 つは論理的 (数学的) 側面からのアプローチを主体にした多項式不変量の調査・研究であり、もう 1 つは、計算機的 (実験的) 側面からのアプローチを主体にした調査・研究である。

それぞれの手法を独立して実施するとともに、研究の進行状況に応じて適宜うまく組み合わせながら研究課題の解決を図る。

このような方法を採用することにより、実験結果・計算結果から成り立つ事象・現象を推測し、それを数学的に証明するアイデアを立

案、論証することで研究課題が解決される可能性が大きくなるからである。

具体的には、既存の多項式不変量について知られている事実を文献などを用いて探索・収集し、その情報を基に、新しい多項式不変量を模倣できるか、あるいは定義済みの多項式不変量について同様の性質や特徴が存在するか等の分析を行い、実際に実験・計算を経て結論を導いていくという手法である。

また、研究環境を整備し研究に支障が出ないよう配慮するとともに、各種学術会議、研究集会への参加やセミナーの主催、あるいは研究打合わせを積極的に行い、他研究者との交流、意見交換を通して研究に有益な情報等を可能な限り入手し、研究の進展に役立てる。研究結果・成果は学術会議等で発表を行うとともに、論文を作成、web などを通じて広く公表し、社会への還元を行う。

4. 研究成果

本研究課題の研究成果について、主なものはマグネティックグラフを経由した結び目・仮想結び目に対する新しい多項式不変量の開発と構成された多項式不変量の性質・特徴の発見である。

以下具体的にそれら結果について記載する。論文「A virtual link polynomial and the virtual crossing number」、 「A multi-variable polynomial invariant for virtual knots and links」は仮想結び目に対して多変数多項式不変量を構成したものである。これら論文においては、多項式の代数的情報から仮想結び目の幾何学的情報の 1 つである仮想交点数が評価できることを見出している。

論文「A multi-variable polynomial invariant for unoriented virtual knots and links」は向き付けられた仮想結び目に対して定義された上記多項式不変量を材料に、向きの付いていない仮想結び目に対して多変数多項式不変量を構成したものであり、この多項式の性質として上記と同様に、仮想交点数が評価できることを示している。仮想交点数を評価できるということは、(古典的な) 結び目かそうでないかが判定できるということであり、大変有用な不変量と言える。

論文「A link invariant dominating the HOMFLY and the Kauffman polynomials」は、古典的な結び目の多項式不変量を統合した不変量を定義したものであり、マグネティックグラフを導入したことで古典的な結び目の多項式不変量が統一的に解釈できることを示した点で意義のある結果となっている。論文「Link polynomials derived from magnetic graphs」は、古典的な結び目の多項式不変量の 1 つの拡張となる多項式不変量を構成したものである。位相的見地からみる

と、発見された多項式は別の古典的結び目の多項式不変量と異なる性質・特徴を持っている。それゆえ、この多項式を詳細に研究すれば、結び目の構造について新たな発見が得られる可能性が高いと思われる。残念ながら、本研究課題期間中にはその予想の解決を成し得ることはできなかった。今後の課題である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

- ① Yasuyuki Miyazawa, A distance for diagrams of a knot, *Topology and Its Applications*, 査読有, 印刷中
- ② Yasuyuki Miyazawa, Gordian distance and polynomial invariants, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 査読有, 印刷中
- ③ Takahiro Nishiyama, Two applications of Coulomb wave functions in hydrodynamics, 京都大学数理解析研究所講義録「オイラー方程式の数理：力学と変分原理 250 年」, 査読なし, 印刷中
- ④ Yasuyuki Miyazawa, A link invariant dominating the HOMFLY and the Kauffman polynomials, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 査読有, Vol.19, 2010, 1507-1533.
- ⑤ Yoshihisa Sato, The necessary condition on the fiber-sum decomposability of genus-2 Lefschetz fibrations, *Osaka Journal of Mathematics*, 査読有, Vo.47, 2010, 949-963.
- ⑥ Yasuyuki Miyazawa, Link polynomials derived from magnetic graphs, *Topology and Its Applications*, 査読有, Vol.157, 2010, 228-246.
- ⑦ Yasuyuki Miyazawa, Knots with a trivial coefficient polynomial, *Kyungpook Mathematical Journal*, 査読有, Vol.49, 2009, 801-809.
- ⑧ Yasuyuki Miyazawa, A virtual link polynomial and the virtual crossing number, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 査読有, Vol.18, 2009, 605-623.
- ⑨ Yasuyuki Miyazawa, A multi-variable polynomial invariant for unoriented virtual knots and links, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 査読有, Vol.18, 2009, 625-649.
- ⑩ Yasuyuki Miyazawa, A multi-variable polynomial invariant for virtual

knots and links, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 査読有, Vol.17, 2008, 1311-1326.

- ⑪ Yoshifumi Ando, Cobordisms of maps with singularities of given class, *Algebraic and Geometric Topology*, 査読有, Vol.8, 2008, 1989-2029.
- ⑫ Yoshihisa Sato, 2-spheres of square -1 and the geography of genus-2 Lefschetz fibrations, *Journal of Mathematical Sciences, The University of Tokyo*, 査読有, Vol.15, 2008, 461-491.

[学会発表] (計 9 件)

- ① Yasuyuki Miyazawa, A distance for diagrams of a knot, *International Conference Japan-Mexico on Topology and Its Applications*, 2010 年 10 月 1 日, Colima, Mexico
- ② Yasuyuki Miyazawa, The structure of the HOMFLY polynomial and admissible values, *E-KOOK Seminar 2010*, 2010 年 8 月 27 日, 大阪市立大学, 大阪
- ③ Yoshihisa Sato, An attempt to introduce the notion of Iitaka-Kodaira dimensions into Lefschetz fibrations, *Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2010*, 2010 年 3 月 8 日, 広島大学, 広島
- ④ 佐藤好久, The canonical classes and the geography of non-minimal Lefschetz fibrations, *4次元のトポロジー*, 2010 年 1 月 20 日, 広島大学, 広島
- ⑤ 宮澤康行, Knots with two trivial coefficient polynomials, *東北結び目セミナー*, 2009 年 10 月 18 日, 山形テルサ, 山形
- ⑥ 佐藤好久, 非極小 Lefschetz 束空間の標準類, *2009 年度日本数学会秋季総合分科会*, 2009 年 9 月 25 日, 大阪大学, 大阪
- ⑦ Yasuyuki Miyazawa, Knots with a trivial coefficient polynomial, *The first KOOK-TAPU Joint Seminar (TOP Seminar) on Knot Theory and Related Topics*, 2009 年 8 月 18 日, 大阪市立大学, 大阪
- ⑧ Yasuyuki Miyazawa, Gordian distance and polynomial invariants, *The 5th East Asian School of Knots and Related Topics*, 2009 年 1 月 13 日, 慶州教育文化会館, 韓国
- ⑨ Yasuyuki Miyazawa, $H(2)$ -unknotting number of a knot, *Intelligence of Low Dimensional Topology 2008 and the Extended KOOK Seminar*, 2008 年 10 月 8

日, 大阪市立大学, 大阪
[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等 なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

宮澤 康行 (MIYAZAWA YASUYUKI)

山口大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号: 60263761

(2) 研究分担者

佐藤 好久 (SATO YOSHIHISA)

九州工業大学・大学院情報工学院・教授

研究者番号: 90231349

(H21 → H22 : 連携研究者)

安藤 良文 (ANDO YOSHIFUMI)

山口大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号: 80001840

(H20 → H21 : 連携研究者)

西山 高弘 (NISHIYAMA TAKAHIRO)

山口大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号: 60333241

(3) 連携研究者

小宮 克弘 (KOMIYA KATSUHIRO)

山口大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号: 00034744