様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　５月　２２日現在

機関番号：１６４０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2008～2010
課題番号：２０５４００８０
研究課題名（和文）　ホップ空間とｐコンパクト群の研究

研究課題名（英文）　Study of Hopf spaces and p-compact groups

研究代表者
逸見　豊　(HEMMI　YUTAKA)
高知大学・教育研究部自然科学系・教授
研究者番号：７０１８１４７７

研究成果の概要（和文）：
空間は単連結とし，すべて奇素数 p で局所化されているとする．また，ホップ空間のホモロジー群は p トーションを持たず，mod p コホモロジー環は有限とする．我々は，まず，階数が 5 以下の既約なホップ空間の分類を完成させ，それを用いてホップ空間の生成元の次元の幅が 8(p-1)未満である場合についての既約分解を決定した．また，その研究の過程で，球面の非安定ホモトピー群の低い次元の生成元がアルファ元の高位の Toda 積で表されることを示した．さらに，四元数 Stiefel 多様体や実 Stiefel 多様体の準 p 正則性に関して知られている結果の拡張も得た．

研究成果の概要（英文）：
Spaces are assumed to be simply connected and localized at a fixed odd prime p. We assume that the homology of each Hopf space has no p torsion, and the mod p cohomology ring of it is finite. We first completed the classification of irreducible Hopf spaces with rank less than or equal to five. Then, by using this result, we determined the irreducible decomposition of Hopf spaces satisfying the condition that the difference between the maximum and the minimum dimensions of the generators is less that 8(p-1). In the course of studying this problem we showed that some low dimensional unstable homotopy groups of spheres are generated by elements given by long Toda bracket of alpha elements. Moreover we extended a known fact on quasi p regularity of quaternionic Stiefel manifolds and real Stiefel manifolds.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２００９年度	900,000	270,000	1,170,000
２０１０年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：代数的位相幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：ホップ空間，空間の既約分解，アトミック空間，p 正則性，準 p 正則性，高位 Toda 積，ホモトピー群

１．研究開始当初の背景

ループ空間は位相幾何学において重要な研究対象であり，これまでさまざまな観点から研究されてきた．中でも，p 完備な有限位相群である p コンパクト群は，コンパクト Lie 群と多くの点で似た性質を持ち，重要な研究対象であることが明らかになっている．

一方，与えられた空間を既約な空間の積に分解することはホモトピー論において基本的な問題であり，たとえばコンパクト Lie 群などに対してはこの分解は完全に調べられている．さらに p コンパクト群についても，研究開始当初に研究代表者は，それらの分解に現れる既約な空間の分類に関していくらかの成果を得ていた．その際に得られたアトミック空間は，球面上の逐次球面束であり，しかも球面のホモトピー群におけるアルファ元のみでコントロールされているというきわめて扱いやすい構造をもつことが分かった．そこで，このアトミック空間を研究することにより，p コンパクト群の構造をより深く知ることができるのではないかと考えるにいたった．さらに，Stiefel 多様体のようなコンパクト Lie 群に関連する重要な空間の多くが，このような単純な空間の積として分解される可能性があるということも予想できた．以上の観点より，ホップ空間と p コンパクト群の研究を行うことにした．

２．研究の目的

(1) p コンパクト群の分解を用いて，その構造を調べる．研究代表者が示した p コンパクト群の分解に現れるアトミック空間は，Mimura, Nishida, Toda によるコンパクト Lie 群の分解に現れる空間が中心である．また，それ以外にはわずか 3 種類しか発見されておらず，それらは例外群 G_2 の mod 3 構造を素数 5 と 7 に拡張した空間であった．その際，分解に現れる空間のホモトピー論的構造は扱いやすいものであり，それらを調べることが，p コンパクト群の研究に新たな方向性を与えるはずであると確信するにいたった．具体的には p コンパクト群の高位ホモトピー可換性の研究，自己写像のホモトピー類からなる群の構造の研究，および LS カテゴリーの決定などに応用できると考えられた．

(2) 奇素数 p に対し，p トーションを持たない単連結なアトミックなホップ空間の分類を行う．ここで，p トーションを持たないものに限定した理由は，Andersen, Grodal, Moller, Viruel により示された，任意の p コンパクト群（p は奇素数）はコンパクト Lie 群の p 完備化と p トーションを持たない単連結な p コンパクト群に分解されるという事実による．研究代表者は，p トーションを持たない単連結なアトミックなホップ空間は，階数が小さい時には，p コンパクト群の分解に現れるアトミックなホップ空間に似た性質を持つという予想を持っており，これを示すのがこのテーマの主目的であった．さらに，得られた分類を用いて，p トーションをもたない有限ホップ空間に対して，(1)で述べた p コンパクト群の研究と同様な問題を考察することにした．

(3) Stiefel 多様体の mod pホップ構造の研究．Stiefel 多様体のコホモロジーは，有限個の奇数次元の元で生成される外積代数になっていることが知られている．このことは，Stiefel 多様体が mod p ホップ空間になる可能性があることを意味する．実際，研究代表者は以前に階数が小さい Steifel 多様体は奇数次元球面の積と p 同値になることを示しており，これは mod p ホップ空間になることも意味する．我々は，階数が大きい場合でも，(2)の研究で与えられるアトミックなホップ空間の積に p 同値になることを示し，それを用いて Steifel 多様体が mod p ホップ空間になることを示すのを目標とした．

３．研究の方法

(1) 研究代表者により最近得られた p コンパクト群の分解に関する結果を用いたものが最初のテーマの主な研究方法になる．まず，p コンパクト群の自己写像のホモトピー類からなる群の構造に関しての研究であるが，すでに単純 p コンパクト群で球面や B_n(p)により分解するもののいくつかについて，研究代表者の学生の西信が非可換性を示している．そこで，より一般的なアトミック空間への分解を用いることにより，この結果の拡張が得られるのではないかと考えた．この研究は，連携研究者の簗山の協力の下で代表者と森杉が中心に行った．森杉は関連する研究により科学研究費補助金を得たことがあり，そのため彼はこの研究には最適であった．また，簗山も自己写像のホモトピー集合に関する研究を長年行っており，有力な協力者になると考えた．一方，p コンパクト群の高位ホモトピー可換性については，まずアトミックな空間に関して考える必要があり，研究目的の(2)の成果の下で研究をはじめることとした．最後に，p コンパクト群の LS カテゴリーの研究であるが，これは，p 完備である p コンパクト群そのものを考えるのではなく，p コンパクト群の分解に現れるアトミック空間は有限複体の p 完備化になっているので，その有限複体の積空間として p コンパクト群の有限複体による表現を考え，それの LS カテゴリーを調べる．そのため，この研究も，まずアトミックな空間に関して考える必要があった．この研究は連携研究者の山口の協力の下に行うこととした．彼はこれまで LS カ

テゴリーに関する論文を数編発表しており，この研究には適任であると考えた．

(2) p 完備な空間はアトミック空間の積に一意的に分解できる．よって，アトミックなホップ空間を分類研究することにより，一般のホップ空間の構造がよく分かる．しかし，アトミックなホップ空間は非常に多く存在する．たとえばpが5以上の素数なら，球面上の球面束でアトミックなホップ空間になるものは，奇数次元球面の偶数次元ホモトピー群と同じだけ存在する．よって，アトミックなホップ空間の単純な分類は意味を持たない．しかしながら，一方でpコンパクト群の分解に現れるアトミックなホップ空間はアルファ元だけでコントロールされているという事実があり，そのため，応用上重要なものはそれほど多くないことが分かる．我々は，まずmod pコホモロジーが有限個の奇数次元の元で生成され，その次元の幅が2(p^2-p)でおさえられるアトミックなホップ空間の分類を考えた．実際，pコンパクト群の分解で現れるものはこの性質をもつ．そして，我々は，そのようなアトミック空間のコホモロジーの生成元の次元はすべて異なり，2(p-1)の倍数のギャップがあるという予想を立てた．すなわち，上記のアトミック空間は何らかの形でアルファ元と関連した形でコントロールされるということである．この事実を示すことができれば，pコンパクト群の研究と同様な方法で mod p 有限ホップ空間の研究が可能になると考えた．この研究は，代表者が中心に行ったが，空間がアルファ元と関連した形でコントロールされるという事実を明快に表現するために，BP 理論や，それを発展させたMorava K理論を用いることを考えた．そのため，日本のBP理論の第１人者である下村に協力を頼んだ．

(3) Stielfee多様体のコホモロジーは，有限個の奇数次元の元で生成される外積代数になっている．研究代表者は過去に，階数が小さい Steifel 多様体は奇数次元球面の積と p 同値になり，それを用いてmod pホップ空間になることを示した．それは James による intrinsic joinを用いて示したのである．しかしながら，階数が大きい場合でも，研究目的の(2)で与えられるアトミックなホップ空間の積空間から Stiefel 多様体の逐次ループ空間への低い次元でのp同値写像を構成することにより，同様な方法が適応できると考えた．この研究は，代表者が中心で行うこととした．

４．研究成果

(1) 研究開始の前年度に，奇素数pに対しホモロジーにねじれを持たない単連結有限 p コンパクト群上の reduced power operation の作用を決定したが，さらにその結果を拡張し，すべてのpコンパクト群に対して，アトム空間による積空間分解を決定した．これは，1977年のMimura, Nishida, Todaによるコンパクト Lie 群の mod p 分解に関する結果を拡張したもので，実際にコンパクト Lie 群の分解に現れるアトム空間に若干の特別な空間を加えたものにより，任意のpコンパクト群が分解されることを示している．残念ながらこの結果は発表前にDavisにより論文として公表されてしまった．

(2) 四元数Stiefel多様体や実Stiefel多様体の奇素数pに対する準p正則性に関して部分的結果を得た．ここで用いた方法は，複素Stiefel多様体には適応できず，四元数や実Stiefel多様体に固有な方法である．

(3) コンパクトLie群の既約分解に関するものとして，Serre のp正則性に関する結果とその一般化である Kumpel の定理，さらに Mimura, Nishida, Toda による準p正則性に関する結果とその一般化であるHemmiの定理が知られている．我々はこれらの結果をさらに拡張し，mod p コホモロジー環が外積代数であるホップ空間がそのコホモロジーの生成元の次元の最大と最小の差が 8(p-1)未満である場合についての同様な既約分解を決定した．

(4) 階数が小さいアトミック空間は「何らかの形でアルファ元と関連した形でコントロールされる」という予想に関して階数が５の場合の興味深い例を発見した．この例は Lie 群の分解には表れないタイプのものである．

(5) 既約なmod p外積ホップ空間で，生成元の次元の最大値と最小値の差が 2p(p-1)未満であるものについて調べた．結果として p が5以上の素数のとき，階数が4以下である既約なmod p外積ホップ空間はその生成元の次元がすべて異なることが分かった．これは，コンパクトLie群やpコンパクト群の既約分解に現れるホップ空間と同様の性質をもつものである．一方，既約なホップ空間で階数が5以上になると，同じ次元の生成元を複数持つものが現れることも分かった．

(6) 次元が奇数 2n+1 である球面の偶数次元ホモトピー群の p 成分は，次元が 2n+1+2p(p-1)以下であれば戸田によるアルファ元で生成される位数 p の巡回群になる．一方，奇数次元ホモトピー群のp成分は次元が 2n+1+2p(p-1)以下のものは非安定になり，n が小さいときのみ非自明な元が現れ，この場合も位数pの巡回群になる．これらの生成元は，n=1 のときは戸田によりアルファ元の合成で与えられることが分かっている．一方で，n>1 のときはアルファ元の合成がすべて自明であることが知られており，これらの生成元の具体的な表示は知られていない．我々はこれら生成元がアルファ元の高位の Toda 積で表されることを示した．

当初の研究目的以外に次の結果を得た．

(7) 実射影空間 RP^n 上の任意のベクトル束やそのテンソルベキに対し，それらが任意の m(>n)に対して RP^m上に安定拡張可能となるための条件を決定した．さらに，安定分解問題に対して完全な解を与えた．これは，すでに発表した RP^n のユークリッド空間への挿入の法バンドルに関する結果の一般化である．

(8) mod 3 レンズ空間 L^n(3)上の任意のベクトル束やそのテンソルベキに対し，それらが任意の m(>n)に対して高い次元のレンズ空間 L^m(3)上に安定拡張可能となるための条件を決定した．これらの結果は，既に得られている射影空間上のベクトル束に関するものの拡張である．さらに，レンズ空間上のベクトル束の安定分解問題に対して完全な解を与えた．

(9) n 次元実射影空間の 2n 次元ユークリッド空間へのはめ込みの法束に対し，その自乗が安定拡張可能となる実射影空間の次元の最大値について調べた．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

① Y. Hemmi and Y. Kawamoto, Higher homotopy commutativity and the resultohedra, J. Math. Soc. Japan, 63, 2011, 443-471, 査読有

② Y. Hemmi and K. Kobayashi, Stable extendibility of the square of the normal bundle associated to an immersion of RP^n in R^{2n}, Kochi J. Math., 6, 2011, 127-137, 査読有

③ Y. Hemmi, T. Kobayashi and K. Komatsu, Stable extendibility of vector bundles over lens spaces mod 3 and the stable splitting problem, Topology Appl., 156, 2009, 2485-2490, 査読有

④ Y. Hemmi, K. Ogi and H. Nishinobu, The action of the Steenrod algebra on the cohomology of p-compact groups, Publ. RIMS 44, 2008, 1199-1218, 査読有

⑤ Y. Hemmi and T. Kobayashi, Stable extendibility of vector bundles over RP^n and the stable splitting problem, Topology Appl. 156, 2008, 26-273, 査読有

⑥ Y. Hemmi, T. Kobayashi and Min Lwin Oo, Stable extendibility of normal bundles associated to immersions of RP^n in R^{2n}, Kochi J. Math., 3, 2008, 167-180, 査読有

〔学会発表〕（計０件）

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等
なし

６．研究組織

(1)研究代表者
逸見　豊（HEMMI　YUTAKA）
高知大学・教育研究部自然科学系・教授
研究者番号：70181477

(2)研究分担者
森杉　馨（MORISUGI　KAORU）
和歌山大学・教育学部・教授
研究者番号：00031807

(3)連携研究者
築山　耕三（TSUKIYAMA　KOUZOU）
島根大学・教育学部・教授
研究者番号：20093651

下村　克己（SHIMOMURA　KATSUMI）
高知大学・教育研究部自然科学系・教授
研究者番号：30206247

山口　俊博（YAMAGUCHI　TOSHIHIRO）
高知大学・教育研究部自然科学系・准教授
研究者番号：90346700