

機関番号：17201

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20540082

研究課題名（和文） 部分多様体の幾何学とリーマン多様体上の微分作用素の固有値理論との融合及び発展

研究課題名（英文） The development and fusion on the geometry of submanifolds and theory for eigenvalues of the differential operators in Riemannian manifolds

研究代表者

成 慶明 (CHENG QING-MING)

佐賀大学・大学院工学系研究科・教授

研究者番号：50274577

研究成果の概要（和文）：本研究では部分多様体の幾何学の独自の研究方法とリーマン多様体における微分作用素の固有値の研究方法を融合し、良い性質を持つ試験関数を構成でき、完備リーマン多様体内の有界領域における Laplace 作用素の Dirichlet 固有値問題の固有値に関する最良普遍不等式及び張り詰められた状態でのプレート問題の固有値に関する優れた普遍不等式を得た。固有値に関する普遍不等式及び Cheng-Yang の漸化不等式を利用し、Laplace 作用素の Dirichlet 固有値問題の第 k 番目固有値に対する最良上限を与えた。さらに、独創的且つ斬新的な研究方法で Polya 予想の完備リーマン多様体版を研究し、Laplace 作用素の Dirichlet 固有値問題の固有値の下限に関する Li-Yau 型不等式を得た。 n 次元 Euclid 空間内の有界領域における張り詰められた状態でのプレート問題の第 k 番目固有値を研究し、Fourier 変換及び領域の対称減少再配列方法を融合し、Levine-Protter の不等式を改良した。様々な立場から部分多様体の幾何学構造及び位相構造に関する研究を行い、単位球面内のスカラー曲率が一定のコンパクト超曲面におけるヤコビ作用素の第 1 固有値を評価し、最適な上限を与えた。さらに、 k 次平均曲率が一定でコンパクト埋め込み超曲面を沢山構成した。

研究成果の概要（英文）：In this project, by making use of fusion on the research methods in the geometry of submanifolds and the research methods for eigenvalues of the differential operators on bounded domains in Riemannian manifolds, we can construct trial functions with good properties such that we obtain a sharp universal inequality for eigenvalues of the Dirichlet eigenvalue problem of the Laplacian on bounded domains in Riemannian manifolds and a universal inequality for eigenvalues of the clamped plate problem. Furthermore, by combining the universal inequality for eigenvalues with the recursion formula of Cheng and Yang, we give the upper bounds for the k -th eigenvalue of the Dirichlet eigenvalue problem of the Laplacian on bounded domains in Riemannian manifolds. It is optimal in the sense of the order of k . By using a new and original method replacing the method of the Fourier transform, we obtain a Li-Yau type lower bound for eigenvalues of the Dirichlet eigenvalue problem of the Laplacian on bounded domains in Riemannian manifolds. About the study on lower bounds for eigenvalues of the clamped plate problem on bounded domains in a Euclidean space, we improve the inequality of Levine and Protter by using the Fourier transform and the symmetry rearrangement of a domain. On the other hand, we study structures of curvatures and topological structures of submanifolds according to several different view points. An optimal upper bound for the first eigenvalue of Jacobi operator of compact hypersurfaces with constant scalar curvature in the unit sphere is given. Many embedded compact hypersurfaces with constant k -th mean curvature in the unit sphere are constructed.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：Laplace 作用素の固有値問題, the clamped plate problem, 固有値に関する普遍不等式, 固有値の下限, 固有値の上限, スカラー曲率, 超曲面, 埋め込み超曲面, 平均曲率, ヤコビ作用素の固有値, 安定性指数。

1. 研究開始当初の背景

部分多様体の幾何学に関する研究及びリーマン多様体における微分作用素の固有値問題の固有値に関する研究はともに微分幾何学の重要な研究課題である。部分多様体の幾何学構造と位相構造の研究は微分幾何学の研究において、最も重要な研究分野の1つである。今まで科学研究補助金の援助のもとで、数多くの論文を発表し、微分幾何学の発展に大きく寄与したことがある。しかし、数多く未解決問題が残っているので、それらを深く追求し、重要な研究成果を得るように努める。尚、リーマン多様体上の微分作用素の固有値に関する研究は微分幾何学の重要な研究課題であるし、それは変分法、偏微分方程式論、音響学、理論物理学、量子力学、固体物理学など諸分野に多岐に渡って重要な研究課題になっている。我々は部分多様体の幾何学の独自の研究方法とリーマン多様体における微分作用素の固有値の研究方法を融合し、リーマン多様体における微分作用素の固有値理論を進展させ、重要な研究成果を挙げることは研究開始当初の背景である。

2. 研究の目的

部分多様体の幾何学の独自の研究方法とリーマン多様体における微分作用素の固有値の研究方法を融合し、リーマン多様体における微分作用素の固有値理論を進展させることは本研究の主要目的である。そのために様々な立場から部分多様体の幾何学構造および位相構造の研究を深く追求し、リーマン多様体における微分作用素の固有値に関する研究を行う。

(1) リーマン多様体内の部分多様体の第2基本形式から定まる様々なスカラーを研究する。

(2) 球面内のスカラー曲率が一定の超曲面は体積を保つ平均曲率汎関数の臨界点であるから、我々は球面内のスカラー曲率が一定な超曲面のヤコビ作用素の固有値に関する研究及び指数に関する研究を行う。

(3) 熱核を用いて、Weyl は Laplace 作用素の固有値の漸近式を得て、固有値に関する研究に対して大きな貢献を与えた。Polya は Euclid 空間の有界領域に対し、Weyl の漸近式が全ての固有値に対して下限であることを予想した。Li-Yau は Fourier 変換を用いて、

Polya の予想を部分的に解決した。彼らの結果は固有値の平均の意味で最適であることもわかった。完備リーマン多様体の有界領域に対して、Weyl の漸近式が成り立つが、Polya の予想のような完備リーマン多様体版をどのように設定するかは重要な研究課題である。一般的な完備リーマン多様体に対し、Fourier 変換の道具も存在しないから、Li-Yau のような研究成果を得るために新しい研究方法が必要である。部分多様体の幾何学の独自の研究方法とリーマン多様体における微分作用素の固有値の研究方法を融合し、新しい研究方法を創設し、この研究課題を研究する。

(4) Laplace 作用素の Dirichlet 固有値問題の固有値の最良上限に関する研究は極めて困難で、重要であるため、Laplace 作用素の Dirichlet 固有値問題の固有値の最良上限を研究する。

(5) リーマン多様体における the clamped plate problem の固有値に関する普遍的不等式を研究する。

3. 研究の方法

本研究で主に利用した研究方法は積分公式、moving frame 法、Rayleigh-Ritz 不等式、試験関数、領域の対称減少再配列方法、Fourier 変換法、Cheng-Yang の漸化不等式である。さらに、このような方法を巧く融合し、新しい研究方法を創造することである。

4. 研究成果

本研究では部分多様体の幾何学構造及び位相構造に関する研究及びリーマン多様体における微分作用素の固有値に関する研究を行い、次のような研究成果を挙げることを成功した。

(1) 単位球面内のスカラー曲率が一定のコンパクト超曲面におけるヤコビ作用素の第

1 固有値を評価し、最適な上限を与え、第 1 固有値がこの上限になるための必要十分条件はこのコンパクト超曲面が全臍的であるか、または Clifford 超曲面であることを示した。

(2) 単位球面内の完備超曲面に対して、位置ベクトルと法ベクトルにより 2 つの関数が定義され、この 2 つの関数を用いて、Gauss-Kronecker 曲率が一定となる完備超曲面の特徴付けを与えた。

(3) Euclid 空間内に平均曲率またはスカラー曲率が一定となるコンパクト埋め込み超曲面が標準球面しかないことがよく知られている。一方、標準球面と 2 つの球面のリーマン積は単位球面内のコンパクト埋め込み超曲面であるが、それ以外のコンパクト埋め込み超曲面が存在するかどうかは重要な研究課題である。我々は k 次平均曲率が一定でコンパクト埋め込み超曲面を沢山構成し、この問題を否定的に解決した。

(4) n 次元 Euclid 空間内の有界領域又は球面内の領域における Laplace 作用素の Dirichlet 固有値問題の固有値に関する最適な普遍不等式はそれぞれ Yang と Cheng-Yang により証明された。完備リーマン多様体の有界領域における Laplace 作用素の Dirichlet 固有値問題の固有値に関する普遍不等式の研究成果はほとんどなかった。その理由としては試験関数をどのように構成するかどうかを知らなかった。我々は Nash の定理を利用し、部分多様体の幾何学の独自の研究方法とリーマン多様体における微分作用素の固有値の研究方法を融合し、良い性質を持つ試験関数を構成できた。これにより完備リーマン多様体内の有界領域における Laplace 作用素の Dirichlet 固有値問題の固有値に関する最良普遍不等式を得た。この普遍不等式及び Cheng-Yang の漸化不等式を利

用し, Laplace 作用素の Dirichlet 固有値問題の第 k 番目固有値に対する最良上限を与えた。

(5) 当該代表者は中国科学院 Yang 教授と共同で固有値に関する普遍不等式及び Cheng-Yang の漸化不等式を用いて, 独創的且つ斬新的な研究方法で Polya 予想の完備リーマン多様体版を研究し, Laplace 作用素の Dirichlet 固有値問題の固有値の下限に関する Li-Yau 型不等式を得た。

(6) 新しい試験関数を構成することにより, 双曲空間内の有界領域における Laplace 作用素の Dirichlet 固有値問題の固有値に関する普遍不等式を得た。

(7) n 次元 Euclid 空間内の有界領域における張り詰められた状態でのプレート問題の第 k 番目固有値を研究し, 領域の「moment of inertia」を用いて, Fourier 変換及び領域の対称減少再配列方法を融合し, Levine-Protter の不等式を改良した。

(8) 部分多様体の幾何学の独自の研究方法とリーマン多様体における微分作用素の固有値の研究方法を融合し, 完備リーマン多様体内の有界領域における張り詰められた状態でのプレート問題の固有値に関する普遍不等式の研究を行い, 優れた普遍不等式を得た。これにより, Wang-Xia の提案した問題を解決した。中国科学院 Yang 教授と共同で双曲空間の有界領域における張り詰められた状態でのプレート問題の固有値を研究し, 普遍不等式を得た。さらに, この普遍不等式の応用として, 有界領域が双曲空間の全体に収束するとき, 全ての固有値は同じ値に収束することを証明した。

(9) Euclid 空間内の有界領域における多重調和微分作用素の固有値問題の固有値に関する普遍不等式を研究し, 最適な研究成果を得た。球面内の領域における多重調和微分作

用素の固有値問題の固有値に関する普遍不等式の研究がとても難しいので, 我々は $2(k+1)$ 個の関数及び 2 つ微分作用素を導入し, 球面内の領域における多重調和微分作用素の固有値問題の固有値に関する普遍不等式を得ることが成功した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 20 件)

① Qing-Ming Cheng Li and Guoxin Wei, A lower bound for eigenvalues of a clamped plate problem, Calculus of Variations and PDEs, DOI:10.1007/s00526-011-0399-6, 2011. 査読有

② Qing-Ming Cheng and Hongcang Yang, Universal inequalities for eigenvalues of a clamped plate problem on a hyperbolic space, Proc. Amer. Math. Soc., 139 (2011), 461-471. 査読有

③ Qing-Ming Cheng, Haizhong Li and Guoxin Wei, Embedded hypersurfaces with constant m th mean curvature in a unit sphere, Comm. Contemporary Math., 12(2010), 997-1013. 査読有

④ Qing-Ming Cheng, Haizhong Li and Guoxin Wei, On some rigidity results of hypersurfaces in a sphere, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 140A (2010), 477-493. 査読有

⑤ Qing-Ming Cheng, Xingxiao Li and Xuerong Qi, A classification of hypersurfaces with parallel para-Blaschke tensor in S^{m+1} , International J. Math., 21(2010), 297-316. 査読有

⑥ Qing-Ming Cheng, Guangyue Huang and Guoxin Wei, Estimates for lower order eigenvalues of a clamped plate problem, Calculus of Variations and PDEs, 38(2010), 409-416. 査読有

⑦ Qing-Ming Cheng, Takamichi Ichikawa and Shinji Mametsuka, Estimates for eigenvalues of a clamped plate problem on Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan, 62(2010), 673-686. 査読有

⑧ Qing-Ming Cheng and Hongcang Yang, Estimates for eigenvalues on Riemannian manifolds, J. Diff. Eqns., 47(2009), 2270-2281. 査読有

- ⑨ Qing-Ming Cheng, Takamichi Ichikawa and Shinji Mametsuka, Estimates for eigenvalues of the poly-Laplacian with any order in a unit sphere, *Calculus of Variations and PDEs*, 36(2009), 507-523. 査読有
- ⑩ Qing-Ming Cheng, Takamichi Ichikawa and Shinji Mametsuka, Inequalities for eigenvalues of Laplacian with any order, *Comm. Contemp. Math.*, 11(2009), 639-655. 査読有
- ⑪ Qing-Ming Cheng, Yujun He and Haizhong Li, Scalar curvature of hypersurfaces with constant mean curvature in a sphere, *Glasg. Math. J.*, 51(2009), 413-423. 査読有
- ⑫ Qing-Ming Cheng and Hongcang Yang, Universal inequalities for eigenvalues of a system of elliptic equations, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 139A (2009), 273-285. 査読有
- ⑬ Sadahiro Maeda, Seiichi Udagawa, Characterization of parallel isometric immersions of space forms into space forms in the class of isotropic immersions, *Canad. J. Math.*, 61(2009), 641-655. 査読有
- ⑭ Sadahiro Maeda, Toshiaki Adachi and Young Ho Kim, A characterization of the homogeneous minimal ruled real hypersurface in a complex hyperbolic space, *J. Math. Soc. Japan*, 61(2009), 315-325. 査読有
- ⑮ Toshihiro Shoda, An example of Jacobian variety and its applications to minimal surfaces, *Results Math.*, 56(2009), 23-39. 査読有
- ⑯ Qing-Ming Cheng and Young Jin Suh, Complete harmonic stable minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold, *Mh. Math.*, 154(2008), 121-134. 査読有
- ⑰ Qing-Ming Cheng, First eigenvalue of Jacobi operator of hypersurfaces with constant scalar curvature, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(2008), 3309-3318. 査読有
- ⑱ Daguang Chen and Qing-Ming Cheng, Extrinsic estimates for eigenvalues of the Laplace operator, *J. Math. Soc. Japan*, 60(2008), 325-339. 査読有
- ⑲ Hejun Sun, Qing-Ming Cheng and Hongcang Yang, Lower order eigenvalues of Dirichlet Laplacian, *Manuscripta Math.*, 152(2008), 139-156. 査読有
- ⑳ Sadahiro Maeda and Toshiaki Adachi, Extrinsic geodesics and hypersurfaces of type (A) in a complex projective space, *Tohoku Math. J.* 60(2008), 597-605. 査読有

[学会発表] (計 28 件)

- ① Qing-Ming Cheng, Estimates for eigenvalues on complete Riemannian manifolds, *International Workshop: Differential Geometry and Geometric Analysis*, March 13-15, 2011, Osaka City University.
- ② 成 慶明, バックリング問題の固有値に関する普遍不等式について, 金沢大学幾何学セミナー, 2010年11月24日, 金沢大学
- ③ Qing-Ming Cheng, A new process on universal estimates for eigenvalues of the buckling problem, Fudan University, Sept. 10, 2010, Shanghai, China.
- ④ Qing-Ming Cheng, Can one hear the shape of a drum? Xianyang Normal University, Sept. 1, 2010, Xianyang, China.
- ⑤ 成 慶明, バックリング問題の固有値に関する予想及びその新展望について, 九州大学幾何学セミナー, 2010年7月23日, 九州大学
- ⑥ 成 慶明, バックリング問題の固有値に関する普遍不等式の研究についての新展望, 東北大学幾何学セミナー, 2010年7月13日, 東北大学
- ⑦ Qing-Ming Cheng, A conjecture on eigenvalues of the buckling problem, Wuhan University, April 30, 2010, Wuhan, China.
- ⑧ Qing-Ming Cheng, On eigenvalues of Laplacian, Hubei University, April 29, 2010, Wuhan, China.
- ⑨ 成 慶明, Laplace 作用素の固有値下限及び上限に関する研究, 金沢大学幾何学セミナー, 2010年2月17日, 金沢大学.
- ⑩ 成 慶明, Indices of hypersurfaces in a sphere, 湯沢研究集会「部分多様体論」, 2009年11月26日-28日, 湯沢グランドホテル.
- ⑪ Qing-Ming Cheng, A new process on estimates for eigenvalues of the buckling problem, November 5, 2009, Tsinghua University, Beijing, China.
- ⑫ Qing-Ming Cheng, Indices of compact hypersurfaces, Beijing Normal Univ., November 4, 2009, Beijing, China.
- ⑬ 成 慶明, A Jacobi operator of hypersurfaces with constant scalar curvature, 幾何学阿蘇研究集会, 2009年9月13日-16日, 阿蘇休暇村.
- ⑭ Qing-Ming Cheng, Recent developments in universal estimates for eigenvalues of a biharmonic operator, Perspectives and open problems in geometric analysis I, July 6-11, 2009, Zhejiang University, Hangzhou, China.
- ⑮ 成 慶明, Biharmonic 作用素の固有値評価の研究について, 東京理科大学幾何学セ

ミナー, 2009年6月11日, 東京理科大学.

⑩ Qing-Ming Cheng, A solution of the PPW problem, The Symposium on Geometry and Analysis on Manifolds, April 25-29, 2009, Chongqing University of Science and Technology, Chongqing, China.

⑪ Qing-Ming Cheng, Hypersurfaces in spheres, Southwest University, April 25, 2009, Chongqing, China.

⑫ Qing-Ming Cheng, Universal inequalities for eigenvalues of a biharmonic operator, The 4th Geometry Conference for the Friendship of China and Japan, December 22-27, 2008, Nankai University, Tenjin, China.

⑬ Qing-Ming Cheng, Upper and lower bounds for eigenvalues of Laplacian, Integrable System, Geometry and Visualization 2008, December 11-13, 2008, Kyushu University.

⑭ 成 慶明, 双調和作用素の固有値に関する普遍不等式について, 多様体上の微分方程式, 2008年12月1日~3日, 金沢市いしかわシティカレッジ.

⑮ Qing-Ming Cheng, Universal estimates for eigenvalues of a biharmonic operator, One Day Workshop on Differential Geometry, November 20, 2008, Saga University.

⑯ Qing-Ming Cheng, Estimates for eigenvalues of Laplacian, Capital Normal Univ., October, 2008, Beijing, China.

⑰ Qing-Ming Cheng, Eigenvalues of Laplacian on Riemannian manifolds, Perspectives in Geometric Analysis, BICMR, Peking University, October 27-31, 2008, Beijing, China.

⑱ Qing-Ming Cheng, Universal estimates for eigenvalues of Laplacian, Wuhan University, October, 2008, Wuhan, China.

⑲ 成 慶明, リーマン多様体における固有値の普遍評価について, 第1回佐賀大学数学研究交流会, 2008年9月, 佐賀大学.

⑳ Qing-Ming Cheng, Estimates for eigenvalues of the buckling problem, 東北大学幾何学セミナー, 2008年7月, 東北大学.

㉑ Qing-Ming Cheng, Estimates for eigenvalues of a biharmonic operator, Zhejiang University, May 30, 2008, Hongzhou, China.

㉒ Qing-Ming Cheng, A generalized conjecture of Polya, International Conference on Differential Geometry, Hefei, China, May 23-27, 2008

[その他]

ホームページ等

http://www.ms.saga-u.ac.jp/~cheng/index_j.html

6. 研究組織

(1) 研究代表者

成 慶明 (CHENG QING-MING)

佐賀大学・大学院工学系研究科・教授

研究者番号: 50274577

(2) 研究分担者

河合 茂生 (KAWAI SHIGEO)

佐賀大学・文化教育学部・教授

研究者番号: 30186043

前田 定廣 (MAEDA SADAHIRO)

佐賀大学・大学院工学系研究科・教授

研究者番号: 40181581

庄田 敏宏 (SHODA TOSHIHIRO)

佐賀大学・文化教育学部・准教授

研究者番号: 10432957