様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年４月１３日現在

機関番号：１７４０１
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：２００８～２０１１
課題番号：２０５４００８４
研究課題名（和文）　共形構造および射影構造の微分幾何

研究課題名（英文）　Differential geometry on conformal structures and projective structures

研究代表者
小林　治（KOBAYASHI　OSAMU）
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：１０１５３５９５

研究成果の概要（和文）：球面上の曲線は球面の共形構造から誘導される射影構造がある．この曲線の射影展開写像が単射ならばこの曲線は自己交点を持たない事がすでに示されている．研究代表者はこの単射性を持つ球面以外の空間を見つける事を試みた．コンパクト階数１対称空間の中でこの単射性定理が成り立つのは球面のみである．これが本研究の主結果である．この結果および関連する観察事実からすべてのコンパクトリーマン多様体の中でこの単射性性質を持つのは球面だけではないかと思われる．

研究成果の概要（英文）：On a curve in the sphere a projective structure is induced from conformal structure of the ambient sphere. It has been shown that if the projective developing map of the curve is injective the curve has no self-intersection. I tried to find other spaces than the sphere on which the injectivity theorem holds. Among compact rank one symmetric spaces only the sphere has this injectivity property, which is the main result of this research project. This theorem with other observations suggests that among all compact Riemannian manifolds only the sphere may have this injectivity property. This will be a future problem.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	９００,０００	２７０,０００	１,１７０,０００
２００９年度	８００,０００	２４０,０００	１,０４０,０００
２０１０年度	１,０００,０００	３００,０００	１,３００,０００
２０１１年度	８００,０００	２４０,０００	１,０４０,０００
年度			
総　計	３,５００,０００	１,０５０,０００	４,５５０,０００

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：微分幾何

１．研究開始当初の背景

共形微分幾何学および射影微分幾何学は研究代表者がかねてより興味を持っていた分野で，それまでの研究からいくつかの未解決問題および未完成の結果を持っていた．
(1) 共形微分幾何学に関しては，山辺不変量の決定問題，特に $S^2 \times S^2$ の山辺不変量の決定は長年の未解決問題でこれに関して新たな知見が求められていた．$S^2 \times S^2$ に関して言えば Weyl 不変量の決定問題も未解決であった．これらは内在的共形幾何の問題である．一方閉曲面上の正則閉曲線の正則ホモトピー不変量についての準備研究があり，この方面では幾何学とトポロジーの橋渡しをす

る共形幾何的な正則ホモトピー不変量の解釈について未完成の研究結果を持っていた．さらに和田昌昭との共同研究で得られていた正則曲線の Schwarz 微分に関してさらなる展開が期待される準備研究があった．
(2) 射影微分幾何学に関しては共形微分幾何学における山辺の問題と類似した変分問題の定式化をその準備として行っていた．この定式化の下，自然に生ずる問題は Ricci 曲率が定符号であるような，かつ体積要素を平行にするアファイン接続の存在，非存在問題で，この方面では1990年代の Lohkamp の有名な負の Ricci 曲率を持つ Riemann 計量の存在定理を除くと，ほとんど未開拓であったと言える．研究代表者は Lohkamp 以前に負の Ricci 曲率計量の存在問題に関して独自の部分結果を持っていた事もあり，アファインならびに射影微分幾何の枠内で定符号 Ricci 曲率問題に取り組むための相応の準備ができていた．

２．研究の目的
上に述べた未解決問題の解明，未完成の結果の完成を目的とした．

３．研究の方法
結局のところ数学の研究は研究者個人の精神活動－思考－によるしかない．そのためのまとまった時間や精神的ゆとりを得る良い方法があればそれこそ一番であるが，現実はそれを許さない．とは言え，財政的支援を得てはじめて可能になる，研究活動遂行上不可欠な事項がある：
(1) 研究集会に参加して最新の研究の流れを知る事．学外の研究者と研究討論などの研究打ち合わせ，研究連絡を行う事．
(2) 数学に関する書籍を購入する事．
(3) 研究に必要な計算機環境の維持．

４．研究成果
　まず始めに正則ホモトピー不変量に関する結果と現状を述べたい．ユークリッド平面上の正則閉曲線の曲率積分を２πで割ると整数となり，これを回転指数と呼び，これが正則閉曲線の正則ホモトピー不変量である事は古典的な事実である．平面でなく種数が 2 以上のコンパクトリーマン面上の閉曲線について一般化をしたい．そのためにリーマン面上に計量を一つ導入する．このリーマン面上に正則閉曲線が描かれているとし，曲線上に無い点 p を取る．p で極を持つような共形ラプラシアンのグリーン関数を考え，この関数で共形変換すると特異点付きの平坦な計量が得られる．この平坦計量は始めの計量の共形類にのみによるのでリーマン面の量として意味がある．この平坦計量を用いて曲線の曲率を定めその曲率積分を求めると２πで割っても整数にはならない．それどころか p に依存した関数 f(p) になる．この関数は曲線上で不連続になり，その飛びは２πのオイラー数倍である．この観察をもとにして閉曲線のホモロジー類が０と仮定するとオイラー数を法にした整数が定義され，これは１９６０年代にラインハルトが見出した一般化された回転指数と一致する事が分かる．したがって問題は閉曲線のホモロジー類が０でない場合である．結果は次の通り：
関数 f(p) の微分は， f が不連続点を持つにもかかわらず，滑らかに定義され，それは調和１形式である．したがって１次元コホモロジーを定めるが，このコホモロジーはオイラー数で割っても整係数コホモロジー類であり，実際，はじめに与えた曲線のホモロジー類のポアンカレ双対になっている．この結果が正しい事は確信している．しかし論文作成中に証明の不備が見つかり，現在のところ発表に至ってない．問題は特異点を持つ計量に関するラプラス作用素のグリーン関数を用いる点にある．特異点を持たない計量のラプラス作用素のグリーン関数について当然成り立っている核関数の対称性について，特異点の存在が障害にならない事の証明が不備であった．これは難易度の観点からすると大変困難な事でないと見ている．仕切り直して再度取り組みたい．
　次に正則曲線の単射性定理に関する結果について述べる．リーマン多様体上の正則曲線を考える．リーマン多様体のメビウス構造に着目する．これは共形構造と非常に近い関係にあり，共形構造に関しても以下に述べる問題が立てられるのだが，ここではメビウス構造を考える．この時，研究代表者が和田昌昭との共同研究で得たシュヴァルツ微分を，この正則曲線に適用すると，この曲線に射影構造が定義できる．曲線は１次元の対象であって何もかもが自明に思われるかもしれないが射影構造の幾何は自明でない．実際，開区間（０，１）には可算無限個の射影構造が入る．さて曲線に定義された射影構造に関してこの構造が積分可能であることから実射影直線 RP^1 に射影的展開写像を定義する事ができる．この展開写像が単射であるときこの曲線は射影単射的と呼ぶ事にする．定曲率球面上の射影単射的曲線は自己交点を持たない事が，和田昌昭との共同研究の結果を用いる事により証明できる．同様な事は球面に限らず完備な定曲率空間およびこれらに含まれる開領域についても言える．この結果は関数論におけるネハリの単葉性定理の別証明を与えるなど応用もあり十分完成度の高いものである．この性質を持つリーマン多様体を「単射性定理が成り立つ多様体」と呼ぶ事にする．当初，単射性定理が成り立つ多様体のクラスはかなり大きいのではないか

と考えていたが，そうではない事を示唆する観察を得た．まず次の結果を証明する事ができる：

コンパクト階数１対称空間で単射性定理が成り立つ多様体は球面だけである．

これはコンパクト階数１対称空間は曲率に関してもまた測地線の様子にしても具体的に分かるので，問題も具体的に確かめる事ができるからである．またもう少し一般的な結果として次を得た：

スカラー曲率がいたるところ非正なコンパクトリーマン多様体は単射性定理が成り立たない．

これはクリンゲンバーグなどによる閉測地線の存在定理を用いて示す事ができる．つまり論法としては大域的な考察を要する．次の一見局所的に見える命題：

スカラー曲率が負となる点を持つようなコンパクトリーマン多様体は単射性定理が成り立たない．

は現在，真偽不明である．おそらく正しいものと思われる．ここに述べただけでは状況証拠としての量は不十分であるが，次の命題：

コンパクトリーマン多様体で単射性定理が成り立つのは球面だけである．

が正しいという可能性がある．もしこれを証明する事ができれば，球面定理の歴史に新たな１ページを加える事ができる．そうでない場合，つまり単射性定理の成り立つ球面でないコンパクトリーマン多様体の例が見つかれば，これも研究の次の段階への足がかりとなり意義深い．単射性定理については以上のような結果を得たが未発表である．理由は論文として発表するだけの完成度に達してないからである．

以上，本研究で得られた主な成果を述べた．

次にこれらの成果の国内外における位置づけについて述べる．

まず正則ホモトピー不変量の共形幾何的解釈についてだが，この研究は研究代表者独自のもので，国内外を問わず同様の研究をしている研究者はいないようである．にもかかわらず，研究に一区切りがつき発表される事になれば相応な評価を受ける事は期待している．まず共形ラプラス作用素のグリーン関数が２次元の時でも思いの外重要である事は，一定の理解を得られている事がある．またこの結果は古典的なコンパクトリーマン面の標準的な議論に現れる内容の微分幾何的な説明となっている点で一定の興味が持たれると期待している．

次に単射性定理についてだが，この研究も研究代表者独自のもので，国内外問わず同様の研究をしている研究者はいないようである．研究結果のインパクトについては，こちらの方が大きいと思われる．完成時の全貌はまだ把握できないが，現在見通せる範囲だけでも，大域の微分幾何である事，共形微分幾何，射影微分幾何双方に関係する事，スカラー曲率，測地線などリーマン幾何の重要な要素を取り入れないといけない事ははっきりしており，この方面のプロの仕事として認められると期待している．

最後に今後の展望を述べる．まず第一に上に述べた結果を早く発表しなければいけない．第一の成果については証明の欠陥をなるべく早く修復する事が必要である．第二の成果については，数学の論文として通用するだけの完成度を持った結果に早く至る必要がある．この段階でも受け付けてくれる学術雑誌は無い訳ではないが，もう少し練る時間が欲しい．

さらなる展望を述べる．正則ホモトピー不変量については，ここで述べたものとは別にホモロジー類が０でない場合に意味を持つ，ラインハルトのとは異なる不変量を研究代表者は得ている．ただしこの不変量の定義は純粋にトポリジー的で今のところ「曲率」の入り込む余地がない．この方向の研究が進む事を研究代表者は強く願っている．一方，正則ホモトピー不変量も対象を曲線に限っていては，数学界での評価には限界がある．曲線の場合の研究をやれるべきところはやれるだけやって，その理論の高次元化を狙いたい．かつてスメールが成し遂げたような事を行うのは無理だとしても，願望だけはある．

単射性定理についても上に述べたように「球面定理」あるいは「反例」，いずれにしても新たな展望を開くだけの内容を持っていると思う．しかし，この問題も正則ホモトピーの問題と同様で，対象を１次元にしている事は早く脱却する必要を感じている．しかし困難さの程度が違う．研究代表者は以前より n 次元射影微分幾何は一般論として n+1/2 次元共形微分幾何と同程度の困難さがあると感じている．つまり２次元の射影微分幾何を研究代表者の考えている方向で進めると，これは 2 次元の共形微分幾何，すなわちリーマン面の理論より，間違いなく困難であると認識している（3 次元の共形微分幾何ほどではないにせよ）．高次元化は確かに今後の展望にあるのだが，多分に願望でもある．

最後にこの研究において成果は得られなかったもの， S^2 x S^2 の山辺不変量の問題，リッチ曲率が定値であるアファイン接続の問題．いずれも非常に興味があり，困難さの程度も安易なものではない，そのような問題があるが，今後も追及していきたい．具体的な成果は得られなかったが，それはなぜなのか，何が必要なのか，どのような戦略を立てなければいけないのか，このような事について考えがまとまりつつある．これはこれで広い意味での研究の成果だと思うのだが理

解して頂けるだろうか？

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計０件）
準備中

〔学会発表〕（計１件）
スカラー曲率に関する未解決と思われる問題について，東北大学，2009 年 11 月 9 日

〔図書〕（計０件）
準備中

〔その他〕
ホームページ等
http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~ok/
に大学院学生セミナー用資料の形にまとめたテキストの草稿を公開している．将来何らかの形で出版される事を見込んでいる．正式なものとは見なされないが，研究活動の証しとして，ここ半年にアップロードしたものを記す.
(1) Lie 群論　2011/08/01
(2) 特性類　2011/09/20
(3) ファイバー束の位相 2011/12/26
(4) K 理論　2012/01/04
(5) スペクトル幾何　2012/01/30
(6) 特異点　2012/02/07
(7) 極小曲面　2012/02/22
(8) Poisson 方程式　2012/02/29

６．研究組織
(1)研究代表者
小林　　治（KOBAYASHI OSAMU)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：１０１５３５９５

(2)研究分担者
なし　　　　　(　　)
研究者番号：なし

(3)連携研究者
なし　　　(　　)
研究者番号：なし