様式Ｃ-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年３月３１日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2008～2010
課題番号：２０５４００８９
研究課題名（和文）　４次元スピン多様体とゲージ理論

研究課題名（英文）　Gauge theory and spin 4-manifolds

研究代表者
亀谷 幸生（KAMETANI YUKIO）
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号：70253581

研究成果の概要（和文）：幾何学において不変量は重要な役割を果たしているが、本研究ではその中で指数と基本群についてそれぞれ異なった動機づけで解析が行われた。前者においては指数の局所化と呼ばれる現象をシンプレクティック幾何学におけるトーラス作用において見出し、定式化を行った。後者においては複素曲面の基本群の分類に現れる SL(3,Z)の共役類の問題について幾何的な問題との関連について多少の進展を得たが、まだ理解されていない部分があり、研究は続いている。

研究成果の概要（英文）：It is well known that topological invariants play important role in geometry. In this research we studied the index of Dirac operators and fundamental groups in different situations. In the former we found a localization of Dirac operators in symplectic action of tori. In the latter we found a geometric interpretation of conjugacy classes of SL(3,Z), which is related to topology of complex surfaces, though it is not completely understood.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	600,000	180,000	780,000
2010 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総　計	1,900,000	570,000	2,470,000

研究分野：ゲージ理論、微分位相幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：指数定理、局所化、共役類

１．　研究開始当初の背景

微分位相幾何学は主に多様体の位相について調べる学問である。その手法において、多くの位相的な情報が多様体のハンドル分解を通して基本群やコホモロジー群などの不変量から得られることはよく知られている。一方、コホモロジー群はそのような位相的側面とは別に解析的な側面を持っており、deRham 作用素や複素幾何学に現れる Dolbeaut 作用素などの微分作用素の性質と幾何学的な性質との関係が積分を通じて理解されている。後者の Dolbeaut 作用素は可微分多様体上で Dirac 作用素として拡張され、指数定理においても重要な役割を果たしているが、コホモロジー群との関係が直接的でないことから、近年の数理物理学の発展まで、研究の対象としての認識は幾何学全体の中では高くなかったのではないかと思われる。

そのDirac 作用素はWitten によるループ空間上の指数定理やSeiberg-Witten 方程式により、幾何学においても研究が進み、指数定理の証明や群作用がある場合のDirac 作用素の指数の消滅定理などを生み出した。特にSeibrg-Witten 方程式によってDirac 作用素が定義されるベクトル束の特性類の研究が進み、４次元スピン多様体の構造や複素曲面の微分同相類はよく理解されるようになった。

このような現状からDirac 作用素の性質およびそれによって現れる現象を様々な角度から研究することは有意義と思われる。更に、基本群などDirac 作用素とは直接関連しない対象にも焦点をあて、多様体の位相的な性質との関係を明らかにしていく。

２．　研究の目的

(1) ４次元多様体の位相的な性質はDirac 作用素の指数によって得られるものとして、Rokhlin の定理はよく知られている。その証明におけるDirac 作用素の役割とSeiberg-Witten 方程式を使った「10/8-定理」の証明の役割は類似している。一方、基本群が自明でない場合に 10/8-定理は拡張されているが、その式はオイラー数や符号数とは違う新しい不変量を使って記述される。これはコホロジー環だけでは決まらない量であるが、コホモロジー環を使った量を使った評価も可能である。計算例も含めてこれを理解したい。

(2)Dirac 作用素の性質を理解する方法として、局所化はよく知られている。その例は指数定理のK-理論を使った証明や熱核を使った証明にそれぞれ異なった場面において表れている。特にAtiyah-Singer の不動点定理においては指数の固定点への局所化が顕著に現れるため、その結果や手法が別の方向に応用され、Dirac 作用素の別の側面を提示していると思われる。これらの結果から更なる別の状況下で新しい局所化の現象を見出すことは期待される。

(3) Seiberg-Witten 理論により４次元多様体論は飛躍的に進歩し、特に複素曲面はその微分同相類の分類についてまとまった結果が得られているが、完全な形ではない。そのような現象はSeiberg-Witten 理論の更なる発展を期待させるが、もう一つはSeiberg-Witten 理論によらない複素曲面の微分同相類の分類である。本研究はそのような例として基本群によって分類できる複素曲面を考察している。

３．研究の方法

(1) 本研究で問題としている４次元スピン多様体の不変量はKO-理論の枠組みで定義されているが、コホロジー環によって定義されるある不変量を使って評価できることがわかっている。この量は枠組みにおいてDirac 作用素をde Rham 作用素に置き換えると、Novikov 不変量に近い形をしているので、その議論や結果を手掛かりにして、符号数のような代数的な意味を明らかにできることが期待できる。

(2) 本研究では、主にトーラスがシンプレクティック多様体に作用し、完全可積分となっている場合がモデルとなっている。そのような場合のDirac 作用素の指数は不動点の周りに局所化されることはよく知られているが、その手法を考察することにより、局所化の様子が詳しく解析され、一般化が可能となる。

(3) これまで、松本幸夫氏や上正明氏によって基本群が大きい場合の楕円曲面の微分同相類が研究され、オイラー数や基本群によって特徴付けられることがわかっている。それと同時に、楕円曲面の構成手法からも微分同相類を特徴付けも行われている。本研究においては、複素曲面の中で井上曲面の微分同相類について考察を行っている。すでにそれらは基本群によって分類されることが知られているが、楕円曲面と同様に構成手法からの特徴付けを行うために行列群の考察を行う。

３．　研究成果

(1)本研究ではまず４次元多様体のコホモロジー環から定まる不変量を定義し、10/8 定理との関係を調べた。更に、コホモロジー環の構造を交叉形式の特徴付けのように何らかの意味で標準的なものから書き下し、不変量の意味を調べる試みを行ったが、本研究において進展はほとんど得られなかった。理由は整係数の代数に関する結果の不理解と思われる。しかし、研究代表者は引き続き検討を行っている。

(2)本研究において、Dirac作用素の指数の局所化がシンプレクティック多様体上のトーラスファイブレーションにおいて消滅することを見出した。特に完全可積分系における運動量写像に対してRiemann-Roch 数がBohr-Sommerfeld ファイバーと特異ファイバーの周りに局所化されることがわかる。その後、更に共同研究を推し進めて、ファイバーが退化している場合に局所化の精密化を行った。その具体的な応用として、複素射影空間上の線形なトーラス作用に関するモーメントマップから得られるトーラスファイブレーシ

ョンにおいて Riemann-Roch 数の寄与が整数点の逆像に局所化されることがわかることを考察した。別の応用として、トーラス作用によって運度量写像が与えられている場合の Guillemin-Sternberg 予想の別証明も与えた。これらはこれまでに知られている結果ではあるが、局所化が指数定理の枠の中で幾何学的に理解でき、様々な一般化が期待できる。
(3)本研究は、村上翔太氏（慶應義塾大学）の研究で得られた井上曲面の微分同相類に関する結果に基づいている。それによると基本群によって微分同相類は特徴付けられ、更に基本群は井上曲面の構成手法に現れる３次の整係数行列の共役類によって特徴付けられることがわかっている。そこで、行列の共役類の特徴付けが問題となるが、複素射影空間への線形作用の考察から、代数的な問題を幾何的な問題に変換することは可能となった。現時点では、その作用の性質を考察している段階である。期待できる結果は共役かどうかを判定するアルゴリズムの構成である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　2 件）

① H.Fujita, M.furuta and <u>T. Yoshida</u>, RR=#BS via localization of index, Trends in Math., 査読有, Vol.12, 2010, pp.1-41
② H..Fujita, M.furuta and <u>T. Yoshida</u>, Torus fibrations and localization of index I, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 査読有, Vol,17, 2010, pp.1-26

〔学会発表〕（計　件）

① 吉田尚彦, Equivariant local index and quantization conjecture, 研究集会 " Toric Geometry, Toric Topology, and Combinatorics ", 大阪市立大学, 2010 年 12 月 3 日
② T.Yoshida, Torus fibrations and localization of index, International Conference "Geometry, Topology, Algebra and Number Theory, Applications, Steklov Mathemetical Institute of RAS and Moscow State University, 2010 年 8 月 19 日
③ 吉田尚彦, Torus fibrations and localization of index, 第５７回幾何学シンポジウム, 神戸大学, 2010 年 8 月 7 日
④ 吉田尚彦, Torus fibrations and localization of index, 研究集会" 非可換幾何と数理物理 ", 慶応義塾大学, 2010 年 7 月 1 日
⑤ T. Yoshida, Torus fibrations and localization of index, Workshop on Toric Topology and Related Topics, 復旦大学（中国）, 2010 年 5 月 3 日
⑥ 吉田尚彦, Torus fibrations and localization of index, 微分トポロジーセミナー, 京都大学, 2010 年 4 月 20 日
⑦ T. Yoshida, *RR=#BS via localization of index*, 連続講演, KAIST Toric Topology Workshop 2010 年 2 月 23 日, 25 日, 26 日, KAIST (Daejeon, Korea)
⑧ 吉田尚彦, *Torus fibrations and localization of index*, 第３６回変換群論シンポジウム, 大阪市立大学, 2009 年 12 月 10 日
⑨ 吉田尚彦, *Torus fibrations and localization of index*, トポロジー火曜セミナー, 東京大学, 2009 年 10 月
⑩ 吉田尚彦, *Torus fibrations and localization of index*, 量子化の幾何 2009、早稲田大学, 2009 年 9 月 17 日
⑪ T. Yoshida, *Torus fibrations and localization of index*, International Conference on Geometry and Quantization, the University of Luxembourg (Luxembourg), 2009 年 9 月 8 日

⑫ 吉田尚彦, *Acyclic polarizations and localization of Riemann-Roch numbers*, 微分幾何学セミナー, 大阪市立大学, 2009年6月10日

６．研究組織

(1)研究代表者
亀谷 幸生（KAMETANI YUKIO）
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号：70253581

(2)研究分担者
清野 和彦（KIYONO KAZUHIKO）
東京大学・数理科学研究科・助教
研究者番号：40234398

吉田 尚彦（YOSHIDA TAKAHIKO）
明治大学・研究・知財戦略機構・研究員
研究者番号：70451903

(3)連携研究者
該当なし