

自己評価報告書

平成23年4月21日現在

機関番号：32621

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008 ~ 2012

課題番号：20540090

研究課題名 (和文) ゲージ理論的手法によるアインシュタイン計量及びリッチフローの研究

研究課題名 (英文) Gauge theoretical approach to Einstein metrics and Ricci flow

研究代表者

石田 政司 (ISHIDA MASASHI)

上智大学・理工学部・准教授

研究者番号：50349023

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：アインシュタイン計量、リッチフロー

1. 研究計画の概要

以下の(1),(2)に分けられる

(1) 4次元多様体上のアインシュタイン計量およびリッチフローの時間大域解の存在、非存在問題に対し、Seiberg-Witten 方程式に付随する様々なゲージ理論的不変量を応用するアプローチを取る。特に、4次元多様体上にアインシュタイン計量もしくは、リッチフローの時間大域解が存在するとき、その4次元多様体に幾何学的にどのような制限がつくのかを、ゲージ理論的不変量を応用することで調べる。

(2) Seiberg-Witten 方程式に付随するゲージ理論的不変量の構成に関するホモトピー論的、代数幾何学的基础付けに関して研究する。

2. 研究の進捗状況

(1) アインシュタイン計量に関する研究計画として、「反自己双対アインシュタイン計量の存在がゲージ理論的不変量の消滅を導く」というルブラン予想及びその一般化を1つの焦点としている。これに関しては、未だ解決を見ないものの一定の成果が得られている。特に予想を具体的な特殊な場合に確認した。さらにアインシュタインとは限らない一般の反自己双対計量に対しても類似の予想を考察し、その一般化された予想の解決のための1つの重要なステップとなると思われる、Seiberg-Witten 基本類の制限を証明した。

(2) 体積エントロピー項つき Hitchin-Thorpe 不等式を満たすにも関わらず、アインシュタイン計量を持ちえない4次元多様体が存在するののか? という問題は、ここ10年近く1つの懸案の問題であった。こ

れに関して、安定コホモトピー不変量の新しい非消滅定理を証明しそれを応用することで、肯定的に解決することができた。

(3) リッチフローの時間大域解の重要なクラスである非特異解の存在、非存在に関していくつかの重要な成果を得た。特に、非特異解の存在、非存在が異種微分構造に依存していることを、非常に広いクラスの4次元多様体に対して証明した。これは、アインシュタイン計量及び反自己双対計量の場合にも成立していた現象が、リッチフローの場合にまで成立することを初めて指摘するものであり、興味深い結果であると言える。

(4) 上記(2)にも記したが、Seiberg-Witten 方程式に付随するゲージ理論的不変量の重要な例である、安定コホモトピー不変量の非消滅定理を証明した。この結果と(2)で開発された手法を応用することで、リッチフローの非特異解の存在に関する Fang-Zhang 予想の逆が一般には成立しないことを証明することができた。

3. 現在までの達成度

上記の研究計画(1)については、②おおむね、順調に計画どおり進行している。一方、上記の研究計画(2)については③やや遅れている。これは1つにはこの研究計画に関連する文献が研究代表者にとって比較的難解なものが多く、理解の進度が遅いことに尽きる。

4. 今後の研究の推進方策

アインシュタイン計量及びリッチフローに関する研究計画については、これまで通りの研究姿勢を貫いていく。ゲージ理論的不変量の構成に関するホモトピー論的、代数幾何学

的基礎付けに関する研究計画については、研究分担者の協力もさらに仰ぎながら、進めていく。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

(1)

Ishida, Masashi, Constraints on Seiberg-Witten basic classes of anti-self-dual manifolds. *Forum Math.* 22 (2010), no. 4, 641-655. 査読有

(2)

Ishida, Masashi and Şuvaina, Ioana, Smooth structures, normalized Ricci flows, and finite cyclic groups. *Ann. Global Anal. Geom.* 35 (2009), no. 3, 267-275, 査読有

(3)

Ishida, Masashi, Răşdeaconu, Rareş and Şuvaina, Ioana, On normalized Ricci flow and smooth structures on four-manifolds with $b_2 + b_3 = 1$. *Arch. Math. (Basel)* 92 (2009), no. 4, 355-365. 査読有

(4)

Brunnbauer, Michael, Ishida, Masashi and Suárez-Serrato, Pablo, An essential relation between Einstein metrics, volume entropy, and exotic smooth structures. *Math. Res. Lett.* 16 (2009), no. 3, 503-514. 査読有

(5)

Tsuzuki, Masao, Spectral square means for period integrals of wave functions on real hyperbolic spaces. *J. Number Theory* 129 (2009), no. 10, 2387-2438. 査読有

[学会発表] (計5件)

(1)

都築正男, Spectral square means for central values of automorphic L-functions for $GL(2)$ 2011年1月20日 京大数理解析研究所

(2)

石田政司, The Ricci flow in dimension four and Seiberg-Witten monopole equations 2009年 I-st Prima Congress (Geometric analysis session) 7月6-7月10日 University of New South

Wales (Sydney, Australia)

(3)

石田政司, The Normalized Ricci flow and exotic smooth structures 2008年 International Workshop on Recent Development in Geometry 10月16日-10月17日 東北大学

(4)

石田政司, リッチフローと4次元異種微分構造 I, II, III 2008年 リッチフローの微分幾何と位相幾何 9月27日-9月30日 東大数理

(5)

石田政司, 安定コホモトピー Seiberg-Witten 不変量の新しい非消滅定理とその応用 2008年 幾何シンポジウム 8月25日 弘前大学

[図書] (計1件)

河東泰之編 (小嶋泉、伊東恵一、石田政司 著) 遊星社 数理解論への誘い 7 2010 総160ページ 担当ページ; 101-158