

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 7 日現在

機関番号：32621

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008 ～ 2012

課題番号：20540090

研究課題名（和文）ゲージ理論的手法によるアインシュタイン計量及びリッチフローの研究

研究課題名（英文）Gauge theoretical approach to Einstein metrics and Ricci flow

 研究代表者 石田政司（ISHIDA MASASHI）
 上智大学・理工学部・准教授

研究者番号：50349023

研究成果の概要（和文）：4次元多様体上のアインシュタイン計量及びリッチフロー解の非存在に関して成果を得ることができた。特に、4次元多様体上のアインシュタイン計量及びリッチフローの解の存在に対する新しい障害を証明した。その障害を応用して、アインシュタイン計量を許容しない4次元多様体の新しい存在定理を証明した。また、体積エントロピー付き Hitchin-Thorpe 不等式を満たすにも関わらず、アインシュタイン計量を許容しない4次元多様体が存在することを証明することができた。さらに、Hitchin-Thorpe 型不等式を満たすにも関わらず、正規化 Ricci flow の非特異解を持たない4次元多様体が無限に存在することを証明した。

研究成果の概要（英文）： We proved new obstructions to the existence of Einstein metrics and non-singular solutions to normalized Ricci flow on 4-manifolds by using Seiberg-Witten monopole equations. As some applications of these new obstructions to 4-dimensional geometry, we proved a new existence theorem of 4-manifolds without Einstein metrics. We also proved the existence of 4-manifolds which admit no Einstein metric, but satisfy the Hitchin-Thorpe inequality with volume entropy term. Moreover, we were able to prove that there exist infinitely many 4-manifolds which cannot admit non-singular solutions to normalized Ricci flow, but satisfy Hitchin-Thorpe type inequality.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
2012年度	600,000	180,000	780,000
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：アインシュタイン計量、リッチフロー

1. 研究開始当初の背景
 多様体上のアインシュタイン計量の存在、非存在問題は、未知の部分が多く残る研究課題である。さらに理解を深めるために様々なアプローチが必要となると考えられる。特に4

次元の場合、ゲージ理論的なアプローチが可能であることが知られている。本研究課題はそのアプローチの様々な意味での深化を目指す。特に、アインシュタイン計量だけではなく、4次元多様体上のリッチフロー解の存

在についても理解を深めたい。

2. 研究の目的

本研究課題の目的は大きく以下の(1)、(2)に分けられる。

- (1) 4次元多様体上のアインシュタイン計量及びリッチフローの解の存在、非存在問題に対して、Seiberg-Witten モノポール方程式を応用する立場を取る。4次元多様体にアインシュタイン計量及びリッチフローが存在するときその4次元多様体にどのような制限がつくのかをSeiberg-Witten モノポール方程式に付随するゲージ理論的不変量を用いて調べる。
- (2) Seiberg-Witten モノポール方程式に付随する種々のゲージ理論的不変量の本質論的、代数幾何学的基礎付けについても研究する。

3. 研究の方法

- (1) 研究代表者は研究分担者と本研究課題に関連するテーマに関して研究連絡を行いながら研究を進める。
- (2) 本研究課題に関連する国内外の研究集会に参加し、研究目的達成のために必要な情報交換や専門家との討論を行う。またメールなども活用し、国内外の研究者との連絡も取りながら研究を進める。

4. 研究成果

- (1) 4次元多様体上のアインシュタイン計量の非存在と異種微分構造の関係に関する、新しい存在定理を証明した。この結果を証明するために、アインシュタイン計量の存在に対する新しい障害を証明した。
- (2) Claude LeBrunによる次の予想がある:「負スカラー曲率反自己双対アインシュタイン4次元多様体のSeiberg-Witten 不変量は消滅する」。この予想は未解決であるが、Seiberg-Witten 不変量のある種の拡張版である、安定コホモトピーSeiberg-Witten 不変量に対して類似の予想を考察し、符号数に関する制限の下、部分的な解を得た。また予想解決に向かったの1つのアプローチとして、Seiberg-Witten 基本類と呼ばれる2次のコホモロジーに関するある種の制限を証明した。その制限は、アインシュタインとは限らない、一般の負スカラー曲率反自己双対4次元多様体に対して証明することができる。類似の制限を反自己双対とは限らない、一般の負スカラー曲率アインシュタイン4次元多様体に対しても証明した。これらの結果は上記予想のあ

る種の一般化をも示唆する。

- (3) 4次元多様体上のアインシュタイン計量の存在に対する障害として、多様体のオイラー数と符合数に関するある不等式が存在する。その不等式を Hitchin-Thorpe 不等式と呼ぶ。Hitchin-Thorpe 不等式を満たすにも関わらず、アインシュタイン計量を許容しない4次元多様体の存在は、1997年頃、LeBrun によって証明された。Hitchin-Thorpe 不等式をさらに深化させた障害として、体積エントロピー付き Hitchin-Thorpe 不等式と呼ばれる不等式がある。その不等式を満たすにも関わらず、アインシュタイン計量を許容しない4次元多様体が存在するかどうかは、ここ10年近くの懸案の問題であった。Seiberg-Witten モノポール方程式に付随する不変量の非消滅定理を応用することで、この問題を肯定的に解決することができた。
- (4) 正規化リッチフローの時間大域解の1つのクラスとして、非特異解と呼ばれるものがある。3次元多様体上の非特異解の性質は、ハミルトンによる深い結果がある。4次元多様体上の非特異解の存在、非存在に関してはあまり多くは知られていない。アインシュタイン計量は非特異解の例となっていることを1つの動機として、上記の(1)と(3)で述べた研究成果を、アインシュタイン計量とは限らない、一般の非特異解に対して一般化することを試みた。成果として、以下を得た:
4次元多様体上の正規化リッチフローの非特異解の存在に対する障害をSeiberg-Witten モノポール方程式を応用することで証明した。その障害を応用することで(1)の結果をリッチフローの場合に一般化することができた。さらにFang-Zhang らによる非特異解の存在に関するある予想に関連して、以下の問いを考察した。Fang-Zhang らは4次元多様体上の非特異解の存在が、Hitchin-Thorpe 型不等式を誘導すると予想している。予想は未解決であるが、この予想の逆が一般には成立しないことを証明した。つまり、Fang-Zhang らによる Hitchin-Thorpe 型不等式を満たすにも関わらず、非特異解を持たない4次元多様体が無限に存在することを証明した。
- (5) 安定コホモトピーSeiberg-Witten 不変量が消滅しない4次元多様体の新しい無限族を構成した。その無限族を使うことで、トポロジーがある意味で小さい4次元多様体で、Hitchin-Thorpe 型不等式を

満たすにも関わらず、非特異解を持たないものを新たに構成することができた。この例は特に、Hitchin-Thorpe 不等式を満たすにも関わらず、アインシュタイン計量を許容しない4次元多様体の新しい例にもなっている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

- (1) Ishida Masashi, Einstein metrics and exotic smooth structures, Pacific J. Math 258 (2012) 327-348. 査読有
- (2) Tsuzuki Masao, Spectral average of central values of automorphic L-functions for holomorphic cusp forms on $S_{00}(m, 2)$. J. Number Theory 132 (2012) 2407-2454. 査読有
- (3) Tsuzuki Masao, Limit formulas of period integrals for a certain symmetric pair II. J. Math. Soc. Japan, 63 (2011) 1039-1084. 査読有
- (4) Ishida Masashi, Constraints on Seiberg-Witten basic classes of anti-self-dual manifolds, Forum Math 22 (2010) 641-645. 査読有
- (5) Brunnbauer Michael, Ishida Masashi and Suarez-Serrato Pablo, Essential relation between Einstein metrics, volume entropy, and exotic smooth structures. Math Res Lett, 16 (2009), 503-514. 査読有
- (6) Ishida Masashi, Rasdeaconu and Suvaina Ioana, On normalized Ricci flow and smooth structures on four-manifolds with $b_2=1$, Arch. Math, 92 (2009) 355-365. 査読有
- (7) Ishida Masashi and Suvaina Ioana, Smooth structures, normalized Ricci flows, and finite cyclic groups. Ann. Global Anal. Geom. 35 (2009), no. 3, 267-275. 査読有
- (8) Tsuzuki Masao, Certain Rankin-Selberg integrals for

unitary groups. Tohoku Math. J 61 (2009) 115-164. 査読有

- (9) Tsuzuki Masao, Spectral square means for period integrals of wave functions on real hyperbolic spaces. J. Number Theory 129 (2009) 2387-2438. 査読有
- (10) Tsuzuki Masao, Limit formulas of period integrals for a certain symmetric pair. J. Funct. Anal. 255 (2008), 1139-1190. 査読有

[学会発表] (計 8 件)

- (1) 都築正男, Relative trace formulas and spectral average of period integrals, 国際研究集会 ゼータ関数 2012 年 9 月 24 日-28 日 東京工業大学
- (2) 都築正男, 保型形式の周期の平均分布 第 57 回代数学シンポジウム、2012 年 8 月 20-23 日 京都大学
- (3) 石田政司, Einstein 4 次元多様体と微分構造, 2011 年 幾何学阿蘇研究集会 8 月 23 日 休暇村南阿蘇
- (4) 都築正男, Spectral square means of central values of automorphic L-functions for $GL(2)$ 2011 年 1 月 20 日 京大数理解析研究所
- (5) 石田政司, The Ricci flow in dimension four and Seiberg-Witten monopole equation 2009 年 1-st Prima Congress (Geometric analysis session) 7 月 6 日-7 月 10 日 University of New South Wales
- (6) 石田政司, The normalized Ricci flow and exotic smooth structures, 2008 年 International Workshop on Recent Development in Geometry 10 月 16 日-10 月 17 日 東北大学
- (7) 石田政司, リッチフローと 4 次元異種微分構造 I, II, III. 2008 年 リッチフローの微分幾何と位相幾何 9 月 27 日-9 月 30 日 東大数理
- (8) 石田政司, 安定コホモトピー Seiberg-Witten 不変量の新しい非消滅

定理とその応用. 2008 年 幾何学シンポジウム 8 月 25 日 弘前大学

〔図書〕 (計 1 件)

- (1) 河東泰之編 (小嶋泉、伊東恵一、石田政司 著) 数理物理への誘い 7 (2010)
総 160 ページ. 担当ページ : 101—158

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石田政司 (ISHIDA MASASHI)
上智大学・理工学部・准教授
研究者番号 : 50349023

(2) 研究分担者

都築正男 (TSUZUKI MASAO)
上智大学・理工学部・准教授
研究者番号 : 80296946