

機関番号：32660
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：平成20年度～平成22年度
課題番号：20540095
研究課題名(和文) 量子微分幾何学の研究

研究課題名(英文) Theory of quantum differential geometry

研究代表者 大森 英樹
(OMORI HIDEKI)
東京理科大学・理工学部数学科・教授
研究者番号：20087018

研究成果の概要(和文)：非可換代数の元の表示を積公式を与えることで一意化し、それを用いて代数を超越的に拡大する手法は「変形量子化」と呼ばれるが、これを可換環から非可換環への変形とみずに、一般の元表示の変形理論とみて、特にワイル代数に対してその表示変形理論の構築をおこなった。これにより物理における観測理論にかなりの手がかりが得られた。

研究成果の概要(英文)：Deformation quantization gives a method of univalent expression of elements of non-commutative algebra. This may be viewed as a deformation theory of expression of element of algebra.

We succeeded the construction of the general theory of deformation expressions for elements of Weyl algebras. This gives a suggestive toy model for the theory of observation in physics.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
20年度	700,000	210,000	910,000
21年度	700,000	210,000	910,000
22年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,100,000	630,000	2,730,000

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目：幾何学・幾何学

キーワード： 微分幾何

1. 研究開始当初の背景
かなり前からの理論として、deformation quantization というのがあり、ここではある種の古典的幾何構造が量子化できるかが問題とされていた。
この問題に対して、我々はすべての symplectic structure, contact structure は

deformation quantizable であることを示している。

ここで言う量子化は、収束性を問題にしないわば形式的量子化なので、これを収束まで含めた理論に変えることが問題となってきた。

2. 研究の目的

Deformation quantization を可換代数から非可換代数への変形とみるのでなしに、広く代数の表示変形論とみなしその理論の構築が目的である。表示を一般にすると、これまで観察されなかった意外なものが見えてくる。これらは、物理学者もあまり気づいていないものばかりである。こういうものの全貌を明らかにしたい。

3. 研究の方法

まずワイル代数において、表示のパラメータを一般にして、表示の変更がどのような性質に反映するか、実例を詳しく調べる。手段は微分方程式、複素解析といったおなじみの微積分学である。

4. 研究成果

非可換代数においては一般に元を一意的表示する方法がない。これは「順序付け問題」と呼ばれることがあるが、我々の関心事はワイル代数でのこの問題である。ワイル代数では多項式環上に積公式を与えて元の表示を一意的にする方法（これは「変形量子化と呼ばれる）がとられるが、ワイル代数を定義する積公式が無数に存在するのでその選択が問題となる。我々は変形量子化を可換環から非可換環への変形とみなすのではなく、広く代数の同形類の中での元の表示の変形とみなし、「代数表示の変形論」として再構成した。

まず1変数の場合を詳細に調べると、その結果1次式の*指数関数までは表示によらない代数構造だけによる理論が構築できるが、2次式以上の*指数関数では表示に依存する様々な現象が現れることを見出した。特にある種の表示のもとでは古典的なヤコビのテータ関数が2次*指数関数の両側無限等比級数として自然に現れるという興味深い結果が得られ、さらにこのような代数表示の変形論は物理学に於ける観測の理論に対しても示唆に富んでいることを見出した。

多変数の場合は1変数よりはるかに複雑だが類似のことが起こる。指数関数を扱うために表示のパラメータを任意に固定してワイル代数を超越的に拡張するが、1次式の*指数関数までは1変数の場合と同様、表示に依存しないで、代数構造にのみ

依存する理論が得られる。これは微分幾何学において広く受け入れられている「幾何学的実体は局所座標系に依存しない表現を持つべきだ」という考え方に対応している。

つまり、元の持つ幾何学的ないし物理的意味は表示のしかたに無関係であるべきだというもので、これを我々は「表示独立性の原理」と呼んでいる。

しかし、我々の発見はこの表示独立性の原理が2次以上の*指数関数では完全に崩れているという事実なのである。

2次の*指数関数でそれを列挙する：
まず、表示パラメータをジェネリックに一つ固定した場合

- (1) 2次式の*指数関数は表示に依存する2重分岐特異点を持つ。そのため2次式の*指数関数は一般には2価の元として扱わねばならず。値は原点からの道筋に依存して符号がきまる。
- (2) 判別式が1の2変数2次式の*指数関数は実軸に平行な直線上で両側に急減少で、虚軸に平行な直線上では周期性を持つ。
- (3) 結果として判別式が1の2変数2次式は二つの異なる逆元を持つ。そのため結合律は破られる。
- (4) 虚軸に平行な直線上の周期性はその直線の実部と表示パラメータに依存する。
- (5) 上の事実から、楕円関数のような2重周期性を持った元が現れる。
- (6) 虚軸に平行な直線上での周期性を使うと、表示に依存して3種類の行列要素が現れる。これを使うと代数の元は表示ごとに行列表示される。ヒルベルト空間のような表現空間を持ち出す以前に行列要素が現れるのが特徴である。
- (7) 普通の微積分学が上の行列表現の中に入れられる。逆に微積分で作る代数の中に上に述べたことはすべて取り込める。

次に、表示パラメータを固定しないで、全体として見た場合：

- (1) $2m$ 変数2次式の*指数関数は点を持つので、積は一般には定義できないが、様々な表示を適宜使えば2価の元のままで全体として「群もどき」の性質をもつ。これは底位相空間なる点集合をもたない

のでブルバキの意味でのリー群ではないが、リー環も指数写像も定義でき局所的には普通のリー群のように扱えるものである。

(2) 上の「群もどき」の中に $Sp(2m)$ の 2 重被覆である meta-plectic 群が部分群として入っている。

特殊な表示パラメータの場合：

(1) ほとんど普通の数のように振舞う元が沢山あるが、ある種の表示ではこれらがクリフォード代数を生成する。つまり、超対称性理論の構築に必要なワイル・クリフォード代数は改めて公理として取り込む以前に微積分の代数の中にすでに組み込まれている。

(2) 上の表示とはある意味で正反対の表示を使うと別の所に今度は 4 元数体が現れる。

これらの結果はただちに物理学的意味を持つものではないが、次のようなことが考えられる。

古典一般力学系ではすべての力学的運動はハミルトン関数によって引き起こされる。別に言えば、これが力学的運動の定義である。古典力学系と微分幾何学は同根のものであるから、「表示独立性の原理」は古典物理学においても広く受け入れられてきた。しかし、現在でも上に述べたような表示依存性が問題にされている形跡はないので、これはいまでも物理学の中で広く受け入れられている原理だろうと推察される。

このことの物理的意味ははっきりさないもので、もう少し物理的意味特に観測論との関係をはっきりさせたいと思っている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

H. Omori, Y. Maeda, A. Yoshioka, N. Miyazaki, Deformation Expression for Element of Algebra. arXiv:1104.1708, 査読無, 2012.

Deformation Expression for Element of Algebra (I). arXiv:1104.2109, 査読無, 2012.

H. Omori, Y. Maeda, A. Yoshioka, N. Miyazaki, Deformation Expression for Element of Algebra (II). arXiv: 1105.1218, 査読無, 2012.

[学会発表] (計 1 件)

[図書] (計 1 件)

大森英樹、力学的な微分幾何、日本評論社、2011

[産業財産権]

○出願状況 (計 1 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者 大森 英樹

(OMORI HIDEKI)

東京理科大学・理工学部数学科・教授

研究者番号：20087018

(2) 研究分担者 小林 隆夫

(KOBAYASI TAKAO)

東京理科大学・理工学部数学科・教授

研究者番号：90178319

(3) 連携研究者

()

研究者番号：