

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月23日現在

機関番号：35302

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2011

課題番号：20540100

研究課題名（和文）代数的L理論におけるアセンブリ写像の研究

研究課題名（英文）A research on assembly maps in algebraic L-theory

研究代表者

山崎 正之（YAMASAKI MASAYUKI）

岡山理科大学・理学部・教授

研究者番号：70174646

研究成果の概要（和文）：空間 X の上の代数的 L 理論スペクトル・シーフを係数とするホモロジー群から L 群へのアセンブリ写像がどのような条件のもとに、 X 上で制御された L 群を経由するのかについて研究を行い、制御写像が単体的に層化されているという条件のもとで、压榨構造を利用することにより、 L 理論的スペクトラム・シーフ係数のホモロジー群から制御 L 群への制御アセンブリ写像が定義できることが証明できた。また、 $-\infty$ 版の代数的 L 理論の場合にはその制御アセンブリ写像が同型となることが証明できた。また、これとは別に、境界上にも特異点を持つようなベクトル場に対して、局所的指数や大域的指数を導入することにより、局所指数をアセンブルすると大域的指数が得られるという古典的なポアンカレ・ホップの定理の拡張を証明することができた。

研究成果の概要（英文）：I proved that the assembly map from the homology groups of a space X with algebraic L -theory spectral sheaf coefficient to the L -groups splits through controlled L -groups, when the control map is simplicially stratified. When we consider the L -theory of $-\infty$ version, then the controlled assembly maps from the homology groups to the controlled L -groups are isomorphisms. The key ingredient is a squeezing structure for L -theory cycles. I also extended the classical Poincare-Hopf theorem on vector fields on manifolds to the case when there are singularities on the boundary, by introducing several new type of indices.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	600,000	180,000	780,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
総計	2,100,000	630,000	2,730,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：代数的 L 理論、アセンブリ写像

1. 研究開始当初の背景

(1) 代数的 L 理論のアセンブリ写像を研究する上で、幾何学的制御の概念を用いて「制御アセンブリ写像」を用いる手法を過去に導入したが、その議論に誤りがあることがわか

った。問題はこまごまと分割されたピースの上で定まっているローカルなオブジェクトを貼り合わせてグローバルなオブジェクトを作る操作（アセンブリ）を行う上で、各局所的ピースが単体上に定まっている場合は、

帰納的に貼り合わせを続けることが困難であるという事実にある。そのギャップを埋めるためには、制御アセンブリ写像に関する種々の基本的な事項について、しっかりとした証明を与えることが必要であった。制御のない古典的なアセンブリ写像に関しては、Quinn による 70 年代の仕事および Quinn や Ranicki らによる 90 年代における別のアプローチが知られている。彼らの新しい方式では、各局所的なピースはサイクルとよばれるやや複雑な構造をもつオブジェクトであり、幾何的には単体の双対錐の上に乗っている。Quinn や Ranicki はサイクルたちはアセンブルできることを観察していたが、アセンブルしたものが圧搾構造（いくらでも好きなだけ細かいサイズに変形する組織的な構成）を持つことについては全く触れていない。一方研究代表者は、Pedersen と制御をもつ代数的 L 群が圧搾性を持つことを証明した。これはアレクサンダー・トリックと呼ばれる各頂点の双対錐上で行う手法を用いたものであった。いったん「和」が定義できればアレクサンダー・トリックの手法がこちらでも応用できるのではないかと考えていた。

(2) これとは別に、ベクトル場の指数に関するポアンカレ・ホップの定理も局所的な指数をアセンブルすることによって大域的な量であるオイラー標数（境界がある場合はその差）が得られると観ることもできることに注目し関連させて検討したが、ポアンカレ・ホップの定理の拡張に関しては Gottlieb らによるものがある。彼らは特異点が孤立でない場合への拡張を色々行っている。ただし、境界に孤立点がある場合に関してはごく単純なタイプのもののみが扱われていた。

2. 研究の目的

(1) 代数的 L 理論（通常のものおよび $-\infty$ 版）における制御アセンブリ写像の厳密な定義を、制御写像が単体的に層化されている場合に与えること。

(2) 制御写像が上と同じ条件をみたしているという仮定の下で、 $-\infty$ 版の L 理論において、制御アセンブリ写像が同型であることを証明すること。

(3) 上記の結果を Novikov 予想などの解決に応用すること。

(4) ポアンカレ・ホップの定理を境界に必ずしも孤立していない特異点のあるベクトル場に対して拡張すること。

3. 研究の方法

(1) Quinn の 70 年代に導入したアセンブリ写像は、単体上で定義されているオブジェクトを貼り合わせることによって定義される。その貼りあわせの仕方によってよい性質をもつものを与えるようなアルゴリズムを探す。同時に、貼り合わせるひとつひとつのオブジェクトに関してそれを圧搾するテクニックを整備する。

(2) Quinn や Ranicki が 90 年代に導入したアセンブリ写像は、単体の双対錐上で定義されたオブジェクトを貼り合わせることによって定義される。こちらに関しては貼り合わせは問題ないので、そのオブジェクトを圧搾するテクニックを開発する。

(3) 圧搾により定義される制御アセンブリ写像は $-\infty$ バージョンの L 理論において、同型となることを証明し、Novikov 予想の解決に向けて基本的な道具とする。

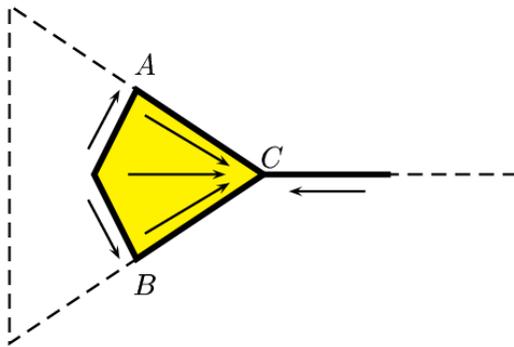
(4) ベクトル場の問題に関しては、簡単な場合には境界でコピーと貼り合わせてダブルを作り、その上のベクトル場をある意味でダブル構成により作ることによって、数種類の指数を定義し、それらの間の関係を調べる。

4. 研究成果

(1) 単体上のオブジェクトに関しては、ある条件を満たすものに関して、圧搾の方法を開発することができた。ホモロジー群から制御 L 群への写像を作るためにはその条件を仮定することは問題がない。より正確には、幾何学的 2 次複体のつくる空間の中にプロパーという性質を満たすもののみを考えるとこれらに関しては圧搾構造がはいる。ホモロジーを与える空間から自然にこのプロパーな部分への写像が定まるので、全体に圧搾構造が存在する必要はないのである。しかし、貼り合わせに関しては、確かに和が存在することは証明できたものの、うまいアルゴリズムを見つけることができなかつたため、最終的にそのサイズを評価することができず、こちらの方法で制御アセンブリ写像を定義するまでには至らなかつた。単体的な方法が本質的に間違っているのか、単に技術的な困難を克服できていないだけなのか非常に興味があるが、それを解明することはできなかつた。

(2) 圧搾構造に関しては、別のアイデアとして、Pedersen との共同の仕事自体を引用すればできそうだと最初は考えていたが、細かいサイズの見積もりをしていくと帰納的な構成では最終結果のサイズの見積もりがどう

工夫してもできないことがわかり、一時はあきらめかけた。(1)の単体上での圧搾をあきらめて、Quinn や Ranicki の導入した頂点の双対錐上のオブジェクト(サイクル)そのものに対する圧搾を構成するように方針を変更した。サイクルは、その構造が単体上のものと比較してかなり複雑であるため、圧搾が困難であると思っていたが、サイクルの上には、自然に圧搾構造が導入できることがわかった。まずサイクルを形成するピースの各面に対するアレクサンダー・トリックを定義し、それを帰納的に適応することにより、任意のサイクルをいくらでも小さいサイズを持つサイクルと同境であることが示された。下にそのアイデアを示す：



上図の破線部分が与えられた多面体を表しており、実線および黄色の部分の部分が頂点Cの周りの双対錐である。与えられたサイクルのこの部分のピースの圧搾は、まず点AおよびBに向かう矢印に沿って行われ、次に点Cに向かう矢印に沿って帰納的に行われる。

これができてから、もう一度振り返ると、Pedersen との仕事での圧搾は、頂点の双対錐に対する今回の圧搾と非常によく似たものであることがわかった。サイクルは制御を行う多面体の単体構造により決まるものであるから、各ピースを圧搾後にアセンブリを行ったときにその和のサイズを明確に評価できるので、制御L群の元が得られることになる。Quinn はサイクルを用いてホモロジー群を定めることができることをかなり一般の状況の下に証明している。その証明を完全に理解したわけではないが、彼の理論が正しいとすると、幾何的制御写像が単体的に層化されているという条件のもとで、制御アセンブリ写像が厳密に定義できることが上で述べた圧搾構造を使うことにより証明できる。これは通常のL理論においても $-\infty$ 版のL理論においても、全く同様である。

具体的に $p : E \rightarrow X$ を制御写像とすると次のような可換図式が得られる：

$$\begin{array}{ccc}
 H(X ; L(p)) & \xrightarrow{a} & L(E) \\
 \downarrow A & & \uparrow = \\
 L(X ; p) & \xrightarrow{F} & L(* ; E \rightarrow *)
 \end{array}$$

ここで、上段左がLシーフ係数ホモロジー、上段右が代数的L理論、下段左がXで制御した制御L理論、下段右が一点で制御した制御L理論(つまり通常のL理論と同じ)、aが通常のアセンブリ写像、Aが制御アセンブリ写像、Fが制御を忘れる写像である。 $-\infty$ 版も同様である。

(3) さらに、 $-\infty$ 版のL理論においては、制御アセンブリ写像が同型であることが、研究代表者が博士論文で用いた方法をもとに双対錐に対して用いることにより証明できた。この定理(ホモロジー群の特徴付け定理)をより正確に書くと次のようになる：「制御写像が単体的に層化されているという条件をみたすものとする。このとき $-\infty$ L理論における制御アセンブリ写像は同型である」：

$$A : H(X ; L^{-\infty}(p)) \sim L^{-\infty}(X ; p)$$

証明の本質は、幾何学的2次複体の余次元1の分割定理である。一般のL理論においては、分割に対し制御K理論的な障害があるために分割定理は成り立たない。また、技術的には高次プリズム体の単体分割と同様な分割が、サイクルやその一般化の間のコボルディズムを「単体分割」する方法が必要になり、その詳細な証明を与えることができた。

(4) ノビコフ予想とは、通常のアセンブリ写像が有理数をテンソルしたときに分裂単射となることである。有理数をテンソルすれば通常のL理論も、 $-\infty$ 版のL理論も同じものになることが知られているので、(3)の結果から、ノビコフ予想を証明するには制御L群から通常のL群への制御を忘れる写像が有理数をテンソルした際に同型になることを示せばよいことになる。それはつまり幾何学的な情報を用いてノビコフ予想が証明される可能性を示している。この方面の応用に関しては研究がやや遅れたために新しい結果を示すことはできなかったが、コクセター群を用いた最近の結果について調べることができた。

(5) 構宏章氏の修士論文を拡張する形で、境界に特異点を持つようなベクトル場に対して、様々な指数(接指数や法指数、さらにはそれらのコンビネーション)を定義し、それ

らに関するポアンカレ・ホップの定理をいくつか証明することができた。もっとも単純な定義は境界に沿ってのダブルによるものだが、状況によってベクトル場のダブルにも色々な種類のを考案した。さらには境界を2つの部分に分け、4つのコピーを複雑に貼り合わせるにより、色々な指数を定義できた。

一例として X が n 次元のコンパクトでなめらかな多様体とし、 V が孤立した零点のみをもつ X 上の連続な接ベクトル場であり、 V を境界に制限したベクトル場 V' の零点と V' の法成分の零点が一致する場合を考えると、 V の接指数 $\tau - \text{Ind}(V)$ が定まり、その値は、 X のオイラー標数、 X の境界で V の零点集合のオイラー標数、 X の境界で V が内向きの部分のオイラー標数によって表される。さらに零点が孤立していない場合にも Gottlieb らの手法を組み合わせて拡張することができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

- ① 山崎正之、Squeezing on a certain L -space、数理解析研究所講究録、査読無、1732 巻、2011、pp. 141-146
- ② 構宏章、山崎正之、Local indices of a vector field at an isolated zero on the boundary、数理解析研究所講究録、査読無、1612 巻、2008、pp. 123-134
<http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/140071>

[学会発表] (計 5 件)

- ① 山崎正之、Squeezing on a certain L -homology spectrum、RIMS 研究集会「変換群の幾何と組合せ論」、2011 年 6 月 15 日、京都大学数理解析研究所
- ② 山崎正之、Squeezing on an L -theory spectrum、Workshop on Transformation Group Theory in Honor of Yasuhiko Kitada、2011 年 2 月 12 日、キャンパスプラザ京都
- ③ 山崎正之、On simplicial coordinate systems、Workshop on Transformation Groups and Surgery Theory、2010 年 9 月 3 日、京都大学数理解析研究所
- ④ 山崎正之、On the index of vector fields、Workshop on Transformation Groups 2010、2010 年 2 月 14 日、山口大学
- ⑤ 山崎正之、Local indices of a vector field at boundary singularities、Workshop on Geometry of Transformation

Groups and Related Topics, 2008 年 5 月 22 日、京都大学数理解析研究所

[その他]

ホームページ等

<http://surgery.matrix.jp/math/research.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山崎 正之 (YAMASAKI MASAYUKI)

岡山理科大学・理学部・教授

研究者番号：70174646