

機関番号：13301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20540112

研究課題名（和文） ランダムな誤差移入が動的システムの構造に及ぼす影響に関する多角的数理解析

研究課題名（英文） Mathematical research for dependence of structure of dynamical system on insertion of random errors

研究代表者

畑上 到 (HATAUE ITARU)

金沢大学・電子情報学系・教授

研究者番号：50218476

研究成果の概要（和文）：本研究では、決定論の微分方程式を離散化してできる差分方程式にランダム項を付加した確率差分方程式を考え、その解の平均的な構造とランダムネスの大きさとの関係について議論した。その結果、ロジスティック系の解析から、ランダムネスによる初期過程での解軌道の混合により、平均的な解構造において逆の周期倍化分岐が生じることが明らかになった、また非圧縮流れ計算における解析から、ランダム項の寄与と4次の粘性項の効果との類似性を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：In the present study, the stochastic difference equations are considered and the relation between the size of noise and characteristics of obtained numerical solutions is discussed. On the stochastic discrete logistic equation, it is clarified that intensively inserted randomness induces the inverse period doubling bifurcation in the averaged dynamical system. Dependence of the unsteady structure of asymptotic numerical solutions of the incompressible Navier-Stokes equations on the randomness is also studied by comparing the dynamical structure of asymptotic numerical solutions. It is clarified that weak noises make the system change and the effects of the noises are similar to those of the fourth viscosity terms.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,700,000	510,000	2,210,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：計算数理論

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：ランダム項，確率差分方程式，数値シミュレーション，確率過程

1. 研究開始当初の背景

地球シミュレータ等に代表される高パフォーマンス大型計算機の急速な発達により、乱流境界層の剥離や化学反応を伴う拡散過程等、解析解を求めることが困難な場合にお

いては直接シミュレーションによる解析は不可欠なものとなっている。このように数値計算が扱う対象がより複雑になればなるほど、特異的な非線型問題解決に対する恣意性や経験パラメータを必要としない直接シミュレーションのニーズは益々高まり、有効な

高精度の数値解析手段の開発が早急に求められることになると考えられる。

しかしながら一方、非線型微分方程式を数値的に解く場合、真の解とは定量的ばかりか定性的にも異なる解（幻影解）を得てしまう恐れがあり、得られた数値解が物理的に正しいものかどうかは、ほとんどの場合、研究者の直感や経験にゆだねられるか、実験との比較によることも事実である。本研究では非線型発展方程式の数値解の構造について決定論に基づく解析手法を開発、適用して、幻影解の性質を明らかにしてきた。

一方、数値計算の解の信頼性を左右している要因の一つにランダムな様式での誤差の移入が考えられる。したがって大まかな解の定性的な挙動や物理変数に対する誤差移入の影響を知るためのアプローチを考えることは非常に重要である。そこで本申請者は誤差に敏感な現象の再現は確率論的なアプローチも含めた解析なしには困難であるとの立場から、確率差分方程式を決定論の差分方程式の誤差が付加されたモデルとして取り上げ、確率差分方程式の解の分布から得られる平均（期待値）の挙動を動的なシステムとして定義し、その構造が決定論の差分方程式の解が平衡点に収束する場合において、もとの決定論の力学系においてはあまり初期値の影響を受けないときでも、ランダム項の大きさがある程度になると平均的な構造に差が生じる場合があることを明らかにしてきた。

以上の背景と研究成果をふまえ、本研究では、それらの方法論をより複雑な系へも適用し解析することで、信頼性の高い数値計算を行う上での重要な指針が得られるであろうとの着想に至った。

2. 研究の目的

本研究では、不動点や周期点の場合に限られているこの確率差分方程式の解の分布から得られる平均（期待値）の挙動を動的なシステムとして扱うアプローチを理論的、実験的に検証し、多角的な数理解析を行うことによって、より複雑な近似的極限集合が出現する系においても適用できるものに拡張することを目的に研究を展開した。さらにこの方法をもとにして、高精度シミュレーション技法の構築とそれを用いた数値解の信頼性の向上をねらい解析を行った。

具体的にはまず、時間が十分経過した後には到達する近似的な不変集合に対してランダムな誤差が鋭敏な初期値依存性を示す場合について、動的システムの構造解析を行う。すなわち、ランダム項を有しながら時間発展していく解軌道の分布とそれらの解軌道の混合が起こる過程を追跡し、ランダム項の大

きさによる依存性について議論した。これにより、鋭敏な初期値依存性を示す動的システムの場合においても、誤差移入がその構造に与える影響を細かく分類することが可能となることが期待されるが、比較的簡単な系において、誤差の大きさがある種の数値解の構造不安定性に対するパラメータになりうるかどうかという問題の解決を試みた。

さらに、現在さまざまな分野で扱われている簡単な偏微分方程式系でもこの評価方法の検証を行い、そのランダムな誤差移入の解の定性的な構造への影響について有効であるかどうかを明らかにする目的で研究を行った。

一方、現実問題への新展開を目的として、多角的に上記の基礎的な解析をもとに、高精度数値シミュレーションにおいてランダムな誤差が計算結果に与える影響について詳細に解析した。さらにこの結果をもとに現実の問題へ展開し、より高精度の数値スキームの構築と対象としている具体的な現象の解明を行った。

3. 研究の方法

比較的簡単な常微分方程式にランダム項を付加した確率微分方程式をもとに、その離散化された確率差分方程式の不変分布や極限分布の構造からその平均の構造を考えることにより、その元となる決定論的方程式の解がどのように変化するかについて解析した。このための計算には、擬似乱数を発生させて得られた多数のサンプリングを必要とするので情報の収集に時間がかかる。また鋭敏な初期値依存性をもつ動的システムの構造へランダム項の移入が与える影響について数値実験で検証するためには精度の高い計算が必要不可欠である。このために並列計算機を導入して、十分なサンプル数をとった統計的に信頼性の高い解析を行った。さらに、この並列計算機を利用して、極限分布の平均の構造に対してランダム項の大きさが分岐のパラメータになり得るかどうかについて考察した。

また一方で確率微分方程式の離散化モデルとして偏微分方程式系へ拡張し、具体的にバーガーズ方程式にランダム項を付加した確率差分方程式等を題材に、その離散動的システムの構造の解明を試みた。

さらに現実の数値シミュレーションにおける誤差移入の影響の解析については、具体的な問題として、非圧縮流れの有限差分法を用いた直接シミュレーション等でしばしば利用される MAC 法を適用して圧力のポアソン方程式を解く問題を取り上げた。特に本研究では、反復法の収束条件によって定性的な解の構造が大きく左右される場合を取り上げ、打ち切り誤差や丸め誤差等によって生じる反

復過程の収束状態が十分でない場合に解構造に影響を与える誤差の性質が一樣であるかどうかをランダムな誤差が移入した場合の結果と比較して議論した。この解析においても、導入した並列計算機を最大限に利用して、サンプル数を可能な限り大きくとり、統計的に精度の高い解析を試みた。

さらに本研究では、物理的な不安定性とランダム項に起因する構造不安定性の違いを明らかにし、新たな具体的な非線型現象の解析にも取り組んだ。

4. 研究成果

離散ロジスティック方程式にランダムネスを付加した場合の数値解の平均値としての力学的挙動、特に周期倍分岐に対するランダムネスの大きさの影響について理論的に考察した。これにより、図1に示すように、 2^n 周期が現れる s の領域では 2^n 周期が 2^{n-1} 周期に変化するが、 2^∞ となる s の値(約3.56)から $s=3.67$ あたりまでは2周期構造、それより大きい s の領域では1点の構造を示すことを明らかにした。(pはランダム項の大きさである。)さらに、 2^n 周期が現れる領域において s の値を固定した場合のランダムネスの大きさの解構造への依存性を調べた。ランダムネスによる初期過程での解軌道の混合により、平均的な解構造において逆の周期倍化分岐が生じることが明らかになった。この結果から、ランダムな誤差移入は次元の低い幻影解の発現を誘起し、解の分岐過程に大きく影響を及ぼすことがわかった。

また誤差の移入が流体の数値シミュレーションに与える影響について、そのランダム性の立場から解析する目的で研究を行った。具体的には、2次元の円柱周りの非圧縮流れを解く場合に、圧力のポアソン方程式を解く反復計算の収束条件が悪い場合に移入する誤差の数値解に及ぼす影響について考察した。その際系全体の解の性質を代表する物理量として抵抗係数を取り上げ、収束条件をゆるめることによってその変化について議論した。その結果、収束条件をゆるめ、誤差の移入が大きくなると、6周期構造が複雑な構造に変化し、さらにゆるめると2周期構造やトーラス的な構造を経て複雑な構造に変わっていくことが示された。この結果は、ランダムな誤差の移入が離散系の安定化と不安定化に影響するばかりか、誤差が大きくてもノイズの少ない安定構造が現れることを示している。一方強制的に付加された一様乱数によるランダムネスによる影響と収束条件をゆるめる効果の類似性を調べた。その結果誤差移入は系を安定化させる場合も不安定化させる場合

もあり、流体シミュレーションという非常に大きな自由度を持つ離散系においてランダムネスの大きさが系の近似的な不変集合の安定化、不安定化に寄与する一種のパラメータになりうることが示唆された。

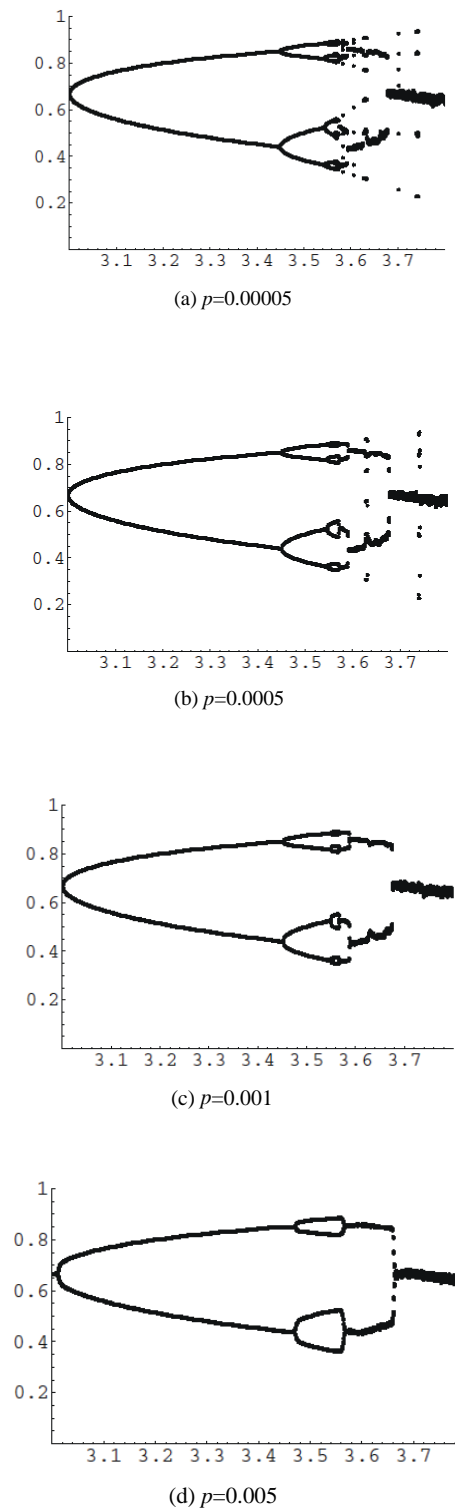


図1. ランダム項の依存性を示す分岐図

また代表的な非線型発展偏微分方程式であるバーガーズ方程式の数値解の構造について、決定論的な数理的手法である力学系の安定性の数値実験的な解析とランダムな項を含んだ確率差分方程式の数値解の平均値の定性的な構造解析の二つのアプローチの比較を行った。この結果、不安定極限集合に安定多様体上を漸近するような場合を回避する上で、ごく微少なランダムネスを決定論の反復計算においても付加することが有効であることが示された。また、決定論の方程式における安定性限界を超えた領域で出現する幻影解のもつ構造に違いがあることが明らかになった。特に保存型と非保存型の2種類の方程式系の違いにも言及し、それらの平均的な動的システムの構造から、決定論の動的システムの安定度についての情報が得られる可能性があることが示された。

またランダム項を付加した場合の圧縮性ナビエーストックス方程式の直接シミュレーションを行い、ランダム項が流れ場の構造へ与える影響について調べた。特に、近似的な極限解集合の構造がリミットサイクルやカオス的な構造をもつ場合を想定して、フーリエ解析を応用した平均的な構造を求めるアプローチを提案して解析を行った。この結果、異なる乱数列から得られる微少なランダムネスを付加した場合には、各標本においてランダムネスがない場合と同じような周期的なものと複雑な構造とが混在しており、この計算過程が非常に不安定な性質を持っていることがわかった。

またこれらの数値実験による考察と平行して基礎的な確率過程に関する考察を行った。特に反射壁確率過程で、安定分布の存在についての結果は知られていたが、自明なものを除いて極限分布まで存在する例を示したものはなかったが、本研究では、1次元のジャンプタイプの反射壁確率過程で、極限分布まで存在する例を示した。

具体的な系への展開については、まずロトカ-ヴォルテラの方程式の飽和項を含む被食者-捕食者モデルに対し、(被食者の季節的な自然増殖率を考慮した)周期的な外部要因を加えることによる影響について考察した。その結果、被食者と捕食者の変化の様子において、外部要因の大きさによる感度に違いがあり、そのパラメータ変化に対して異なる分岐過程をへることがわかった。

さらにランダムネスを含む確率モデルの現象論的な応用として、セミ類の羽化と交尾の生態に着目し、確率モデルを考えることによって、オスとメスの羽化日のピークのずれと交尾率の関係を明らかにした。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① Saisho, Y., Mathematical observations on the relation between eclosion periods and the copulation rate of cicadas, *Mathematical Biosciences and Engineering*, 7-2(2010),443-453,査読有
- ② Hataue, I., On Dependence of Dynamical Structure of Numerical Solutions of Fluid Simulations on Forcibly Added Randomness, *J. of Comp. and Appl. Math.*, (2010),1,82-89,査読有
- ③ Hataue I., Dependence of Structure of Flow Simulation Results on Random Errors, *Information*, 12(2009), 963-972, 査読有
- ④ Saisho, Y., Limit Distribution of a One-dimensional Reflecting Process of Jump Type, *Tokyo J. Math.*, 7(2009), 1-17,査読有

[学会発表] (計9件)

- ① 畑上到, ランダムネスを付加したランダムネスを付加した平均挙動に関する考察, 第14回環瀬戸内応用数理研究部会シンポジウム, 2011年1月22日, 岡山理科大学理学部(岡山県)
- ② 税所康正, セミの羽化と交尾についての確率論的考察, 2010年度京都大学数理解析研究所共同利用研究集会, 第7回「生物数学の理論とその応用」, 2010年11月17日, 京都大学数理解析研究所(京都府)
- ③ 税所康正, 伊藤敦, DNAの2本鎖切断に関する数理生物学的考察, 日本放射線影響学会第53回大会, 2010年10月21日, 京都テルサ(京都府)
- ④ 税所康正, セミの交尾生態に関する数理的考察, 日本昆虫学会第70回大会, 2010年9月20日, 山形大学農学部(山形県)
- ⑤ Hataue, I., On Bifurcation Process of Nonlinear Dynamical System with Sizable Randomness, Fifth International Conference on Information, 2009年11月7日, 京都大学(京都府)
- ⑥ 畑上到, 森郁彌, 周期的な外部要因を含んだ被食者-捕食者モデルに関する一考察, 第13回環瀬戸内応用数理研究部会シンポジウム, 2009年9月12日, 徳島大学工学部(徳島県)
- ⑦ 畑上到, ランダムネスを含む非線型力学

系の平均挙動の解析, 第6回日本流体力学
学会中部支部講演会, 2008年11月8日,
名古屋工業大学工学部(愛知県)

- ⑧ 畑上到, 流体計算の近似解の構造へのランダムな誤差の依存性, 第12回環瀬戸内
応用数理研究会シンポジウム, 2008年
10月11日, 山形大学理学部(山形県)
- ⑨ Hataue, I., Dependence of Structure of
Flow Simulation Results on Errors in
Iteration Process, 5th European
Congress on Computational Methods in
Applied Sciences and Engineering
ECCOMAS2008, 2008年7月1日,
Venice Convention(Italy)

[その他]

ホームページ等

<http://cpm.ec.t.kanazawa-u.ac.jp/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

畑上 到 (HATAUE ITARU)

金沢大学・電子情報学系・教授

研究者番号: 50218476

(2) 研究分担者

税所 康正 (SAISHO YASUMASA)

広島大学・工学研究科・准教授

研究者番号: 70195973

(3) 連携研究者

小俣正朗 (OMATA SEIRO)

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号: 20214223