様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　６月　５日現在

機関番号：13901
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2008～2012
課題番号：20540113
研究課題名（和文）　楕円型境界値問題が定義された領域の形状および位相最適化問題の正則化解法
研究課題名（英文）　Regularization solutions to shape and topology optimization problems of domains for elliptic boundary value problems

研究代表者
畔上　秀幸（AZEGAMI HIDEYUKI）
名古屋大学・情報科学研究科・教授
研究者番号：70175876

研究成果の概要（和文）：弾性体や流れ場などが定義された領域の形状を設計対象にした最適化問題を形状最適化問題という．このとき，弾性体の変位場は偏微分方程式の境界値問題（主問題）の解として与えられ，評価関数は，主問題が定義された領域と主問題の解の汎関数として定義される．本研究では，領域変動を表す設計変数の許容集合を定義し，評価関数の形状微分を評価する方法と勾配法(H1 勾配法)による形状更新法を示した．さらに，その方法で得られる領域列は許容集合内に入ることを示した．

研究成果の概要（英文）：Optimization problem of shape of domain in which an elastic body or a flow field is defined is called the shape optimization problem. Here, a deformation field of an elastic body for example is given as a solution of a boundary value problem of a partial differential equation (main problem). Cost functions are defined as functionals of the domain in which the main problem is defined and the solution of the main problem. In the present research, an admissible set of a design variable representing domain variation was defined. Based on the definition, an evaluation method of the shape derivatives of cost functions and a gradient method (H1 gradient method) for reshaping were presented. Moreover, it was confirmed that the domain sequence obtained by the method remains in the admissible set.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
2009 年度	600,000	180,000	780,000
2010 年度	600,000	180,000	780,000
2011 年度	600,000	180,000	780,000
2012 年度	600,000	180,000	780,000
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：応用数学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：応用数学，関数解析学，数理工学，設計工学，境界値問題，最適化

1．研究開始当初の背景

形状最適化問題は 20 世紀初頭から数学者らの関心を集めてきた． 1908 年に Hadamard が多大な業績の一端として，薄膜の基本振動数に対して境界摂動に対する変分について論じていることを挙げることができる．その後，関数解析の理論が整備され，1970 年代から 1980 年代にかけて，Lions を中心としたフランスの数学者らによって分布系の最適制御理論が体系化されたことを受けて，フランスの Cea, Pironneau, Zolésio，旧

ソビエトの Banichuk らが，領域変動（初期領域から新領域への連続写像）に対する Fréchet 微分によって形状勾配を定義し，形状最適化問題に対する最適性の必要条件が解析的に求められることを示した．

しかしながら，解析的な関係に基づいて有限要素法などで形状勾配を計算して，それを直接用いた勾配法によって形状を変更していくと，形状が波打ってくる数値不安定現象が観察された．この現象は，形状最適化問題の正則性に関わる本質的な問題とされてきた．

この問題に対して，申請者は，1994 年に形状勾配に比例して直接境界を移動するのではなく，形状変動を拘束する部分境界では同次 Dirichlet 境界条件を仮定し，形状変動を許す残りの部分境界では形状勾配を Neumann 境界条件として与えた楕円型境界値問題の解を使って領域を変動させる方法を提案した．その後，同次 Dirichlet 境界条件が不要となる Robin 境界条件を用いる方法も提案している．この方法は，楕円型境界値問題として線形弾性変形問題を選べば，Neumann 境界条件は表面力になることから，この方法を力法 (traction method) と呼ぶことにした．この方法によれば，基本的な問題，例えば，体積制約付線形弾性体の外力仕事最小化（剛性最大化）問題， Navier-Stokes 流れ場の粘性による散逸エネルギー最小化問題などに対しては形状が波打たずに最適形状に収束することが確認された．

その後，申請者らは，力法の数学的な解釈を示すことを検討し，d 次元領域 Ω に対して，力法は $H^1(\Omega;\mathbf{R}^d)$における勾配法になっていることを海津聰先生との共著論文で示した．

一方，領域の最適な孔配置を求める問題は，連続体の位相最適化問題と呼ばれている．特性関数と境界値問題の解で評価関数を構成する問題は，いつも解があるとは限らないことが示された．その理由は， L^∞級の関数では領域の至るところで値をとることはできるが，境界のトレースがとれないためである．そこで，特性関数を密度を表す連続関数のべき乗関数におきかえて密度型の位相最適化問題を構成し，その解のレベルセットで連続体の位相を求める方法が注目されるようになった．その方法は，中間の密度にペナルティを与えることになることから SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) 法と呼ばれている．

このような方法を採用しても，有限要素法を用いて設計関数を要素単位で離散化した問題を勾配法で解析すると，設計関数がチェッカーボード状に振動する数値不安定が発生することが知られている．工学者らは，フィルタを用いることでこの問題を回避してきた．

この問題に対しも，申請者らは，不足した滑らかさを回復する勾配法を考案し，SIMP 位相最適化問題における H^1 勾配法と呼んで提案した．さらに，数学的な裏付けについて検討し，ある条件を満たす許容集合の下で解の存在がいえること，H^1 勾配法の解が許容集合に属すことを海津聰先生らとの共著講演論文で示した．また，基本的な数値実験を行い，数値不安定が起こらないことを確認している．

そこで，本研究を始めるにあたり，次のような見通しをもっていた．力法は境界形状最適化問題に対する H^1 勾配法とみなすことができて，SIMP 位相最適化問題に対する H^1 勾配法と合わせて，統一的に理解することができる．すなわち，それらはある関数空間上で定義された抽象的最適設計問題に対する抽象的勾配法の具体例としてとらえられることができる．

２．研究の目的

本研究では，これまで提案されてきた境界変動型や密度変動型の形状最適化問題に対する解法を統一的にとらえなおし，抽象的最適設計問題に対する抽象的勾配法の具体例であることを示すことを目的とした．その際，これまで提案されてきた解法が正則になるための条件を明らかにすることを目指した．ここで，解法が正則であるとは次のような意味である．設計変数の許容集合を定義して，ある解法で新しい設計変数を求めたとき，それが設計変数の許容集合に入ることが保証されるとき，その解法を正則とよぶことにする．

また，その成果に基づいて，これまで可解性があきらかではなかった形状最適化問題や位相最適化問題に対しても H^1 勾配法を適用することで解が得られることを示すことも目的とした．

３．研究の方法

本研究では，以下の構想に沿って形状最適化問題を構成し，その解法を導いた．

(1) 偏微分方程式の境界値問題を主問題（最適化問題の等式制約条件）とする密度変動型の位相最適化問題や境界変動型の形状最適化問題では，密度相当関数のレベルセットや写像により境界を表現する．そのために，それらの関数は Lipschitz 級である必要がある．そこで，設計変数の許容集合には Lipschitz 級の実 Banach 空間を仮定した．

(2) 抽象的勾配法は Hilbert 空間上で定義が可能となる．そこで，設計変数の許容集合（実 Banach 空間）を含む実 Hilbert 空間上で抽象的最適設計問題を定義した．その際，主問題はある実 Hilbert 空間上の抽象的変分問題として定義した．また，評価関数を設計変数と抽象的変分問題の解（状態変数）の汎関数であると仮定して，それらの一つを目的関数とおき，残りを制

約関数において，抽象的最適設計問題を構成した．

(3) 抽象的勾配法を使えるようにするために，設計変数の変動に対する評価関数の Fréchet 微分を定義し，その評価方法を示した．

(4) 評価関数の Fréchet 微分が設計変数の入る実 Hilbert 空間の双対空間に入る条件が満たされた下で，実 Hilbert 空間上で抽象的勾配法を定義した．このような定義によれば，抽象的勾配法の解の一意存在は Lax-Milgram の定理によって示すことができる．

(5) 抽象的勾配法により評価関数ごとにそれらが減少するような設計変数の変動方向が得られたと仮定して，逐次 2 次近似計画法に基づく解法を示した．

以上の結果に基づいて，密度型位相最適化問題と境界変動型形状最適化問題は，それぞれ抽象的最適設計問題の枠組みに入り，それぞれの問題に対する H^1 勾配法は抽象的勾配法を具体化した方法になっていることを示した．

さらに，密度型の位相最適化問題と境界変動型の形状最適化問題に対する H^1 勾配法が正則な解法になるための条件を明らかにした．その条件が満たされた下であれば，様々な問題に応用できることになる．密度型位相最適化問題と境界変動型形状最適化問題の応用に関しては次の項で示す．

4．研究成果

上記方法に沿って構築した理論を要約すると以下のようになる．

抽象的変分問題を主問題とおいた抽象的最適設計問題において，設計変数の変動に対する評価関数の Fréchet 微分を評価する方法を，有限次元空間における随伴変数法を関数空間に拡張することで正当化できることを示した．

密度型位相最適化問題は，Lipschitz 級の関数を設計変数におき，密度を設計変数のシグモイド関数で定義することで，抽象的最適設計問題の枠組みに収めることができた．その結果，H^1 勾配法を用いた解法は正則であることを示すことができた（雑誌論文⑦）．

境界変動型形状最適化問題では，抽象的最適設計問題の枠組みに収めるために，Lipschitz 境界をもつ初期領域を含む固定領域を設け，その固定領域からの Lipschitz 級の写像を設計変数とおくことで抽象的最適設計問題の枠組みに収めることができた．この問題では，評価関数の形状微分（領域変動に対する Fréchet 微分）を評価する方法を導くにあたり，これまで知られてきた境界積分による表現に加えて，領域積分による表現が得られることを明らかにすることができた．その成果は，き裂の進展評価に使われる一般 J 積分に関する大塚厚二教授（広島国際学院大学）によって導かれていた成果を利用することで可能となった．その表現を用いれば，主問題において特異点が存在するような場合にも形状微分が評価できることになる．この成果は日本応用数理学会の 2013 年春の研究部会連合発表会で発表された（学会発表①）．今後，その内容を論文としてまとめる予定である．

また，H^1 勾配法を有限要素法で数値解析する際，有限要素の大きさを小さくしていったとき，厳密解に収束するための条件を明らかにした．その結果を要約すると以下のようである．密度型位相最適化問題に対しては，主問題，随伴問題および H^1 勾配法を解くためにそれぞれ1次要素を用いれば，有限要素の大きさの1次のオーダーで厳密解に収束する結果が得られる（雑誌論文⑤）．また，境界変動型形状最適化問題に対しては，境界積分による形状微分の評価式を用いた場合は，主問題と随伴問題を解くためにそれぞれ2次要素を用いて，H^1 勾配法を解くために1次要素を用いれば，有限要素の大きさの1次のオーダーで厳密解に収束する結果が得られる（雑誌論文①）．一方，領域積分による形状微分の評価式を用いた場合は，主問題，随伴問題，H^1 勾配法を解くために1次要素を用いることで，有限要素の大きさの1次のオーダーで厳密解に収束する結果を得る．

これらの成果は，現在，著書にまとめられようとしている．その草稿は「文部科学省・科学技術試験研究委託事業「数学・数理科学と諸科学・産業との協働によるイノベーション創出のための研究促進プログラム（略称：数学協働プログラム）」の一つとして実施された「ワークショップ ： 形状最適化の数理と製品設計への応用」の中で資料1（413 頁）として使われた．

さらに，位相最適化問題や形状最適化問題の応用に関しては，次のような成果を得た．

(1) 接触する弾性体の接触圧力を望みの分布にする形状最適化問題に対して，実用に耐える数値解が得られた（雑誌論文⑨）．

(2) 非定常 Navier-Stokes 流れ場の散逸エネルギーを最小化する形状最適化問題に対して，数値解法と数値例を示した（雑誌論文⑧）．

(3) 楽器の最適設計への応用を目指した音場構造連成系の放射音圧を最大化する形状を決定する問題に対して Fréchet 微分の評価方法を示した（学会発表⑮）．

(4) リンク機構の最適設計問題に対して，運動エネルギーを最大化する形状最適化問題に対する形状微分の評価方法を示した（雑誌論文②）．

(5) 脊柱特発性側彎症の成因解明と治療法に関する研究において，脊柱有限要素モデルを CT データに近づける問題を形状と密度を設計変数にして構成し，その問題を解くプログラムを開発した（学会発表②）．

(6) 建築物の固有振動数および固有振動モードの実験値から損傷個所をみつける問題を構成し，その解法と固有振動数を用いた場合の数値例を示した（学会発表⑧）.

(8) 粒子法を用いて境界変動型形状最適化問題を H^1 勾配法で解析できることを示した.（学会発表④）.

理論と応用に関して以上のような成果が得られた. しかしながら，それらは時間の経過とともに同時並行的に進められてきた. そのために，応用に関しては理論の成果が反映されていないままとなっている. 今後は，これまで得られてきた理論に基づいて，応用として扱われてきた問題について，問題の構成法から数値解析に至るまで，それらが適切であったかについて再検討していく必要がある. さらに，これまで取り組んでこなかった電磁場の形状最適化問題や，産業界で問題になっている個別の課題に対して，どのように問題を構成すればよいのか，あるいはどのようにプログラムを構成していけばよいのかについて，さらなる研究が必要である. 報告者は，本研究で得られた成果が社会で生かされるよう，これらの課題に対して取り組んでいく所存である.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 14 件）

① Daisuke Murai, Hideyuki Azegami: Error analysis of H1 gradient method for shape-optimization problems of continua, JSIAM Letters, 査読有, 5, 2013.03, pp. 29-32.

② Hideyuki Azegami, Liren Zhou, Kimihiro Umemura, Naoya Kondo: Shape Optimization for a Link Mechanism, Structural and Multidisciplinary Optimization, 査読有 2013.02,pp.1-11,DOI10.1007/s00158-013-0886-9, DOI 10.1007/s00158-013-0886-9

③ Hideyuki Azegami, Shota Fukumoto, Taiki Aoyama: Shape optimization of continua using NURBS as basis functions, Structural and Multidisciplinary Optimization, 査読有, 47(2), 2013.01,pp.247-258,DOI10.1007/s00158-012-0822-4.

④片峯英次，吉岡広起，松浦浩佑，畔上秀幸: 平均コンプライアンス最小化を目的とした熱弾性場の形状最適化，日本機械学会論文集 B 編，査読有, 77(783), 2011.11, pp. 4015-4023.

⑤ Daisuke Murai, Hideyuki Azegami: Error analysis of H1 gradient method for topology optimization problems of continua, JSIAM Letters, 3, 査読有, 2011.11, pp. 73-76.

⑥新谷浩平，長谷高明，伊藤聡，畔上秀幸: サスペンション部品の非線形座屈現象に関する形状最適化の検討，日本機械学会論文集 A 編，査読有, 74(748), 2011.08, pp. 1187-1198.

⑦Hideyuki Azegami, Satoshi Kaizu, Kenzen Takeuchi: Regular solution to topology optimization problems of continua, JSIAM Letters, 査読有, 3, 2011.01, pp. 1-4.

⑧ Yutaro Iwata, Hideyuki Azegami, Taiki Aoyama, Eiji Katamine: Numerical Solution to Shape Optimization Problems for Non-stationary Navier-Stokes Problems, JSIAM Letters, 査読有, 2, 2010.05, pp. 37-40

⑨ Takahiro Iwai, Akinobu Sugimoto, Taiki Aoyama, Hideyuki Azegami: Shape optimization problem of elastic bodies for controlling contact pressure, JSIAM Letters, 査読有, 2, 2010.01, pp. 1-4.

⑩畔上秀幸: 境界値問題が定義された領域の形状および位相最適化問題の正則化解法, 数理解析研究所講究録, 査読無, 1638, 2009.04, pp. 1-17.

⑪ Eiji Katamine, Yuya Nagatomo, Hideyuki Azegami: Shape optimization of 3D viscous flow fields, Inverse Problems in Science and Engineering, 査読有, 17(1), 2009.01, pp. 105-114.

⑫片峯英次，西橋直志，畔上秀幸: 抗力最小化・揚力最大化を目的とした定常粘性流れ場の形状最適化，日本機械学会論文集 B 編，査読有, 74(748), 2008.12, pp. 2426-2434

⑬片峯英次，岩田侑太朗，畔上秀幸: 放熱量最大化を目的とした非定常熱伝導場の形状最適化，日本機械学会論文集 B 編，査読有, 74(743), 2008.07, pp. 1609-1616.

⑭Eiji Katamine, Yoshiyuki Kawase, Hideyuki Azegami: Shape Optimization of Thermal Forced Convection Fields, Heat Transfer Asian Research, 査読有, 37(5), 2008.07, pp. 313-328.

〔学会発表〕（計 70 件）

①畔上秀幸，大塚厚二，木村正人: 日本応用数理学会 2013 年研究部会連合発表会，東洋大学 白山キャンパス, 2013.03.14, 一般 J 積分を用いた特異点に対する形状微分の評価について.

②柴田俊輔，畔上秀幸: 第 25 回バイオエンジニアリング講演会，産業技術総合研究所 つくば中央，2013.1.9, 医用データに基づく患者別数値モデルの作成法.

③Riren Zhou, Hideyuki Azegami: The Seventh China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems (CJK-OSM 6), Huangshan, China, 2012.6.18, Shape Optimization Problem for Link Mechanism.

④三ヶ田真吾，畔上秀幸: 日本応用数理学会 2012 年研究部会連合発表会，九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所，2012.3.8, 粒子法による流れ場の形状最適化

⑤ Hideyuki Azegami: ESF-JSPS Frontier Science Conference, Series for Young Researchers, Mathematics for Innovation: Large and Complex Systems, The Four Seasons Hotel Tokyo at Chinzan-so, Tokyo, Japan, 2012.2.28, Shape optimization for boundary value problems of PDE and its application to mechanical design.
⑥Hideyuki Azegami: 2011 Taiwan-Japan Joint workshop on Numerical Analysis and Scientific Computation, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, 2011.11.12, Shape and topology optimization problems of continua and their numerical solutions.
⑦ Shota Fukumoto, Taiki Aoyama, Hideyuki Azegami: The 9th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-9) , Granship (Shizuoka Cultural Foundation), Shizuoka, Japan, 2011.6.13, Shape optimization of continua using NURBS as basis functions.
⑧伊藤友文，畔上秀幸: 日本応用数理学会 2011 年研究部会連合発表会，電気通信大学，2011.03.7，密度型位相最適化問題の欠陥同定への応用
⑨ Hideyuki Azegami: The 2010 NIMS Conference and the Third China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics, Gangneung-Wonju National Univeriesity, Korea, 2010.8.19, Regular solutions to shape and topology optimization problems for boundary value problems
⑩ Hideyuki Azegami: The Sixth China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems (CJK-OSM 6), Kyoto Garden Palace Hotel, 2010.6.22, Irregularity of Shape and Topology Optimization Problems for Boundary Value Problems and Its Regularization Method.
⑪ Hideyuki Azegami: The 2nd International Workshops on Advances in Computational Mechanics (IWACOM-2), Pacifico Yokohama, Yokohama, Japan, 2010.03.29, Shape optimization problem of elastic bodies for controlling contact pressure.
⑫ Hideyuki Azegami, Yutaro Iwata, Eiji Katamine: The 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-8) , LNEC Conference Centre, Lisbon, Portugal, 2009.6.1, Numerical solution of shape optimization problems for Navier-Stokes problems.
⑬Hideyuki Azegami: JSME D&S Seminar : Optimum Design - Toplogy and Shape Optimization II，早稲田大学，西早稲田キャンパス, 2008.11.25, Consciousness of regularity for sensitivities in shape and topology optimization problems._
⑭畔上秀幸: RIMS Workshop - 数値解析における理論・手法・応用，京都大学 数理解析研究所，2008.11.12，境界値問題が定義された領域の形状および位相最適化問題の正則化解法
⑮中村有里，新谷浩平，青山大樹，畔上秀幸: 日本応用数理学会 2008 年度年会，東京大学柏キャンパス（柏市），2008.9.17，楽器のための形状最適化問題.

〔その他〕
ホームページ等
http://www.az.cs.is.nagoya-u.ac.jp/

6．研究組織
(1) 研究代表者
畔上 秀幸（AZEGAMI HIDEYUKI）
名古屋大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号：70175876

(2)研究分担者　なし
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者　なし
（　　）

研究者番号：