

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 6月 5日現在

機関番号：13901  
 研究種目：基盤研究(C)  
 研究期間：2008 ～ 2011  
 課題番号：20540114  
 研究課題名（和文）  
 中規模無限基数上の組合せ論  
 研究課題名（英文）  
 Combinatorics on medium-sized infinite cardinals  
 研究代表者  
 吉信 康夫 (Yasuo YOSHINOBU)  
 名古屋大学・情報科学研究科・准教授  
 研究者番号：90281063

研究成果の概要（和文）：アレフ数 2 以上の無限基数上の組合せ論は、アレフ 1、つまり可算でない最小の無限基数上のそれとは異なった様相を呈する。本研究では、アレフ数 2 以上の基数のうちでも比較的小さい無限基数に固有な組合せ論的性質を、集合論のよく知られたいくつかの公理との相互作用や、集合論的位相空間論への影響の観点から詳しく調べ、いくつかの重要な知見を得た。

研究成果の概要（英文）：Combinatorics of infinite cardinals greater than or equal to aleph 2 take on a different aspect from that of aleph 1, that is, the least uncountable cardinal. In this research, we studied inherent combinatorial nature of relatively small infinite cardinals greater than or equal to aleph 2, from the aspect of its interaction with several well-known axioms of set theory and that of its influence on set-theoretic topology, and obtained several significant results in this area.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：公理的集合論

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：数学基礎論，公理的集合論，集合論的位相空間論，強制法，強制公理，反映原理，基数不変量

## 1. 研究開始当初の背景

## (1) 集合論の公理系の自然な拡張

連続体仮説、つまり可算濃度と連続濃度の間に他の濃度がないという命題が、集合論の標準的な公理系である ZFC から独立であることがゲーデルとコーエンによって示されて以来、無限濃度に関する様々な組合せ論的命題の ZFC からの独立性が示されて来た。しかし、集合論の公理系を自然な形で拡張して、連続体仮説やその他の組合せ的命題の真偽

を決定しようとする試みも続けられてきている。この文脈で、巨大基数公理と呼ばれる、強い性質をもつ大きな濃度の存在を主張する公理や、巨大基数的な性格をもつ強制公理や反映原理などの公理の仮定のもとで、無限組合せ論についてのいろいろな帰結が調べられてきた。

## (2) 本研究以前の研究代表者の研究

研究代表者は、それらの公理のアレフ 2 やそ

れ以上の基数上の組合せ論への影響に焦点をあて、平成 17~19 年度に科研費若手研究 (B)「アレフ数 2 以上の無限基数上の組合せ論と巨大基数公理」の補助のもとで、この方面でのいくつかの結果を得た。たとえば、代表者と König との共同研究では、強制公理がアレフ 2 閉性をもつ半順序集合による強制法でどの程度保たれるかを調べた。また、König, Larson との共同研究で、アレフ 2 の可算部分集合族についての弱い反映原理が強い反映原理を導くための十分条件を見つけた。この他、嘉田、友安と共同で、距離付け可能な位相空間のコンパクト化の族の持つ構造にまつわる基数不変量について調べる研究も行ってきた。これらの研究を通して、アレフ 2 など比較的小さな無限基数上の無限組合せ論に固有の構造の研究の必要性が浮かび上がって来ている。

## 2. 研究の目的

この研究の目的は、それ以前の研究を継承しつつ、アレフ 2 以上の比較的小さい無限アレフ数をもつ基数(中規模無限基数)上での組合せ論に固有な構造を包括的に明らかにすることである。より具体的には、以下のテーマについて調べる。また、これらの問題に横断的に関わるであろうアレフ  $\omega$  上の組合せ論についても調べる。

- (1)  $\kappa$  閉やそれに似た性質をもつ半順序集合による強制法の違い、特にマーティンの極大公理を保存する程度の違いについて。

強制法は集合論において命題の独立性を示す最も有用な方法のひとつである。強制法では、半順序集合を用いて、集合論宇宙をいろいろな命題をみたすように変形するのだが、変形の仕方は用いる半順序集合の組合せ的性質に依存して決まる。 $\kappa$  閉性は、そのような組合せ的性質の一つで、半順序集合が  $\kappa$  閉であるとは、その半順序集合内の濃度  $\kappa$  未満の任意の下降列が共通の下界をもつときという。研究代表者と König の本研究以前の共同研究により、強制公理 MM はアレフ 2 閉な半順序集合による強制法では必ずしも保たれないことがわかった。一方、アレフ 2 閉よりわずかに強いアレフ 2 有向的閉な半順序集合による強制法で MM は保たれることが知られており、半順序集合の性質と MM の保存との関係は微妙なものとなっている。そこで、アレフ 2 閉やそれに似た性質をもつ半順序集合による強制法で、MM やその部分系がどの程度保存されるのかを詳しく調べ、MM の部分系の強弱構造と、アレフ 2 閉性に似た半順序集合の性質のそれとの対応関係を包括的に調べる。

- (2) 可算集合族上の反映原理について。

反映原理とは、アレフ 2 以上の無限基数の可算部分集合の任意の定常な族に対し、そのある大きさアレフ 1 の集合上への制限がまた定常となるという形の主張で、巨大基数公理的な性格をもち、MM の部分系ともみなされる。弱い反映原理と強い反映原理の分離の問題は、よく知られた未解決問題である。この問題やいろいろな強制公理との関連等を調べる。

- (3) 位相空間のコンパクト化などにまつわる基数不変量について。

研究代表者は、嘉田、友安との本研究以前の共同研究により、距離付け可能な空間において、ストーン・チェックコンパクト化を近似するのに必要な、スミルノフコンパクト化など距離に依存するコンパクト化の最小基数  $sa$  などの基数不変量の性質を調べてきた。本研究でも  $sa$  が取りうる値の多様性やそれに関わる順序構造の性質、他の位相空間の性質と基数不変量の関わりなどについて調べる。

## 3. 研究の方法

組織としては、まず名古屋近辺の研究メンバーを中心として研究全体を統括する部門をおき、研究の目的欄に述べた(1)~(3)の3つの小テーマのそれぞれに取り組む小研究グループ(A)~(C)を編成して研究に取り組んだ。各部門は次のような構成とした。

統括部: 吉信, 松原, 渕野, 宮元, 酒井, 薄葉

グループ(A): 吉信, König

グループ(B): 吉信, König, Larson, 酒井, 薄葉

グループ(C): 吉信, 嘉田, 友安, (2010 より) 薄葉

統括部のうち名古屋近辺に在住するメンバーは概ね週一回開かれる名古屋集合論セミナーで会合し、研究の進捗の把握、情報の分析、方針の決定にあたって代表者に助言を行った。統括部の連携研究者のうち松原は巨大基数公理やイデアルの理論について、渕野はブール代数や強制公理の理論について、宮元は強制法の理論について、それぞれ代表者に助言を行った。また、小グループのうち(A), (B)では主に代表者、時に代表者と König が主体的に研究を進め、適宜他のメンバーの助言を得た。(C)では個別の問題

ごとに各メンバーと共同で研究を進めた。遠方のメンバーとは学会や研究集会などを利用して会合したり、直接相互の大学を訪問する等の機会をもち、情報交換や討論を行った。

下記の長期間の研究打合せを実施した。

- (1) 2009年11月17日～12月5日: Bernhard König が名古屋大学を訪問, 主にテーマ(1),
- (2) (研究の目的欄参照)について議論した.
- (2) 2011年10月4日～26日: Bernhard König が名古屋大学を訪問, 主にテーマ(1) (研究の目的欄参照)について議論した.

#### 4. 研究成果

(1) (研究の目的欄のテーマ(1), (2)に関連) 代表者は, Asperó, Krueger とともに, 「 $\lambda$  が正則基数または可算共終基数のとき,  $\lambda$  の可算部分集合の任意の定常な族に対し, その定常な部分族で, 大きさアレフ1のどんな集合への制限も定常にならないものが存在する」という反映原理の強い否定命題(「稠密的不反映性」ともいう)が, MM より弱い強制公理の一つである固有強制法公理(PFA)と矛盾しないことを示した. この結果は MM からは反映原理が導かれることと強い対照をなしている. この結果は論文(4)で発表した.

(2) (研究の目的欄のテーマ(1)に関連)

①二人のプレイヤーが, 与えられた半順序集合の, その順序に関してより小さい要素を交互に取り合い, それを与えられた順序数の回数だけ繰り返す(ただし極限数手目は後手から始める)ことができたときに後手の勝ちとする, という二人ゲームをバナッハ・マズアゲームという. 与えられた半順序集合上の手数  $\omega_1+1$  のバナッハ・マズアゲームにおいて, 後手がそれまでの棋譜のブール下限値と, 今何手目か, という情報だけに依存する必勝法をもつとき, その半順序集合は作戦的に閉であるという. 代表者は, (1)で用いた手法を一般化して, PFA が作戦的に閉な半順序集合による強制法でつねに保たれることを示した. この結果は, PFA が戦略的に閉な(単に後手が必勝法をもつ)半順序集合による強制法では必ずしも保たれないことや, MM やその別の部分系などは作戦的に閉な半順序集合による強制法でも必ずしも保たれないことと好対照をなしており, 強制公理と半順序集合の性質の階層構造の対応関係についての理解を深めるものである.

②①に関連して, 作戦的に閉な半順序集合による強制法で強制できる組合せ論的命題の例として「登攀可能性」(CP)という命題を

導入し, CP が作戦的に閉な半順序集合のクラスについての, アレフ2個の稠密集合に対するマーティン型公理と同値になることを示した.

③②で導入した CP がモデル理論の有名な命題であるチャン予想を否定すること, さらに CP に類似の組合せ論的命題がチャン予想のより大きい濃度への一般化を否定することを示した. またこのことと①の応用として, チャン予想とそのより大きい濃度への一般化全部の否定が PFA と無矛盾であることを示した. PFA がチャン予想の否定と矛盾しないことはヴェリコヴィッチにより知られているが, 本研究の結果は PFA の任意のモデルから強制法によりチャン予想の否定を強制できることを示しており, より汎用性が高いといえる.

④①のさらなる一般化として, 先手が各手番で半順序の元ではなく可算部分集合を選び, その時点までに選ばれた集合全部の和のブール下限値として自分の手を表すバナッハ・マズア型ゲームの変種を導入し, このゲームで後手が各手番において先手がそれまでに選んだ集合全部の和, および今何手目であるかの情報にのみ依存する必勝法をもつような半順序(\*作戦的に閉な半順序と呼ぶ)による強制法で PFA が保たれることを示した. この結果は PFA とある弱いスクエア原理が無矛盾であるというマゴドアの結果など, PFA と無限組合せ論の命題の無矛盾性についての既知のほとんどの結果を帰結として含んでおり, PFA の保存についてのきわめて包括的な定理である.

⑤③の半順序のクラスに対し, アレフ2個の稠密部分集合に対するジェネリックフィルタの存在を主張するマーティン型公理と同値になるような,  $\omega_2$  のある性質をもつ部分集合の存在を主張する組合せの命題を特定し, この命題もまた PFA と無矛盾であることを示した.

これらの結果のうち, ①～③については論文(1)で発表した. また④, ⑤についてはそれぞれ学会発表(3), (2)で発表した.

(3) (研究の目的欄のテーマ(3)に関連)

代表者は, 嘉田(連携研究者)とともに, 非孤立点の全体がコンパクトでない可分距離化可能空間  $X$  について,  $X$  の互いに素な閉集合対全体と  $X$  上の距離全体との間に「距離が1以上」という関係を考え, これと Galois-Tukey の意味で同型な順序構造を発見し,  $X$  のストーン・チェックコンパクト化を生成するスミルノフコンパクト化の族の最

小濃度  $sa(X)$  を与える等式の構造的な説明を与えた. この結果については論文 (3) で発表した.

(4) (研究の目的欄のテーマ (3) に関連)

位相空間のコンパクト性を弱めた性質であるリンデレーフ性などいくつかの被覆についての性質が, コーヘン強制, ランダム強制などで保たれる, という岩佐や嘉田の結果に触発され, 代表者を含むグループは被覆性質の強制法のもとでの保存性について調べた. その結果, 足立が仮定  $b = \omega_1$  のもとで支配実数の付加により必ずリンデレーフ性が壊れるリンデレーフ空間の例を発見し, さらに代表者と薄葉はこれを改良してこのような例で正則性をもつものや, パラコンパクト性など他の被覆性質についても同様に支配実数の付加で壊れる例を発見した一方, マーティンの公理の下では, アレフ数が有限でかつ連続濃度より小さい濃度をもつ空間のリンデレーフ性が, 可算鎖条件をもつ強制法で保たれることを示した. これらの結果については学会発表 (4), (5), (7), (8) で発表した.

(5) この他, 研究の目的欄のテーマ (1) の動機付けになっている, アレフ 2 閉な半順序集合による強制法で MM が必ずしも保たれないという代表者と König との共同研究の成果をまとめて論文 (2) として発表した. 主な成果は本研究開始以前に得られていたが, 議論の改良や関連文献の整理など論文としてまとめる作業を本研究で行った.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- (1) Yasuo Yoshinobu, Operations, climbability and the proper forcing axiom, *Annals of Pure and Applied Logic*, 査読有, vol. 164, no. 7-8, 2013, pp. 749-762. DOI:10.1016/j.apal.2012.11.010
- (2) Bernhard Koenig and Yasuo Yoshinobu, Kurepa trees and Namba forcing, *Journal of Symbolic Logic*, 査読有, vol. 77, no. 4, 2012, pp. 1281-1290. DOI:10.2178/jsl.7704130
- (3) Masaru Kada and Yasuo Yoshinobu, Galois-Tukey connection involving sets of metrics, *Tsukuba Journal of Mathematics*, 査読有, vol. 36, no. 1, 2012, pp. 53-66.
- (4) David Asperó, John Krueger and Yasuo Yoshinobu, Dense non-reflection for stationary collections of countable

sets, *Annals of Pure and Applied Logic*, 査読有, vol. 161, no. 1, 2009, pp. 94-108. DOI:10.1016/j.apal.2009.06.002

[学会発表] (計 11 件)

- (1) 嘉田勝, 吉信康夫, 距離関数の順序構造と Galois-Tukey connection, 2012 年度日本数学会秋季総合分科会トポロジー分科会, 2012 年 9 月 18 日, 九州大学.
- (2) Yasuo Yoshinobu, On weakly operationally closed posets, FMF/JSPS joint seminar on Forcing in Set Theory, 2012 年 1 月 23 日, 神戸大学.
- (3) Yasuo Yoshinobu, The Banach-Mazur game with imperfect recall, 京都大学数理解析研究所研究集会「記述集合論の展望」, 2011 年 10 月 19 日, 京都大学.
- (4) 薄葉季路, 吉信康夫, 強制法と位相空間の被覆の性質について, 2011 年度日本数学会秋季総合分科会トポロジー分科会, 2011 年 9 月 30 日, 信州大学.
- (5) 足立裕基, 薄葉季路, 吉信康夫, Lindelöf 空間と Hechler 強制, 2011 年度日本数学会秋季総合分科会数学基礎論及び歴史分科会, 2011 年 9 月 28 日, 信州大学.
- (6) 吉信康夫, Climbability properties and the strong non-reflection, 神奈川大学集合論セミナー, 2011 年 9 月 3 日, 神奈川大学.
- (7) 薄葉季路, 吉信康夫, 強制法のもとでの被覆の性質の保存について, 第 46 回位相空間論シンポジウム, 2011 年 6 月 3 日, 静岡大学.
- (8) 足立裕基, 薄葉季路, 吉信康夫, Set theoretic aspects of Lindelöf spaces, 2010 年度 General Topology シンポジウム, 2010 年 12 月 21 日, 筑波大学.
- (9) 嘉田勝, 友安一夫, 吉信康夫, How many miles to  $\beta X$ , after all?, 2010 年度 General Topology シンポジウム, 2010 年 12 月 20 日, 筑波大学.
- (10) 吉信康夫, 半順序集合上のゲームと PFA, 2009 年度日本数学会秋季総合分科会数学基礎論及び歴史分科会, 2009 年 9 月 26 日, 大阪大学.
- (11) Yasuo Yoshinobu, Forcing axioms and closure properties of posets, The 10<sup>th</sup> Asian Logic Conference, 2008 年 9 月 3 日, 神戸大学.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

吉信 康夫 (YOSHINOBU YASUO)  
名古屋大学・大学院情報科学研究科・准教授  
研究者番号：90281063

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

渕野 昌 (FUCHINO SAKAE)  
神戸大学・大学院システム情報学研究科・教授  
研究者番号：30292098  
松原 洋 (MATSUBARA YO)  
名古屋大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号：30242788  
宮元 忠敏 (MIYAMOTO TADATOSHI)  
南山大学・経営学部・教授  
研究者番号：70229889  
嘉田 勝 (KADA MASARU)  
大阪府立大学・大学院理学系研究科・准教授  
研究者番号：00312447  
友安 一夫 (TOMOYASU KAZUO)  
都城工業高等専門学校・一般科目理科・准教授  
研究者番号：10332107

### (4) 研究協力者

酒井 拓史 (SAKAI HIROSHI)  
神戸大学・大学院システム情報学研究科・講師  
研究者番号：70468039  
薄葉 季路 (USUBA TOSHIMICHI)  
名古屋大学・高等研究院・特任助教  
研究者番号：10513632  
Bernhard König  
(元) トロント大学・客員研究員  
Paul B. Larson  
マイアミ大学・教授