

機関番号：14501

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008 ～ 2010

課題番号：20540117

研究課題名 (和文) 平均曲率流の近似問題と正則性・特異性に関する研究

研究課題名 (英文) Studies on approximation, regularity and singularity  
for mean curvature flow

研究代表者 石井 克幸 (ISHII KATSUYUKI)

神戸大学・海事科学研究科・准教授

研究者番号：40232227

研究成果の概要 (和文)：画像処理に現れる変分問題を基にした非等法的平均曲率流に対する近似スキームの収束を証明した。また、数理ファイナンスに現れる自由境界問題について変分法を基にした時間離散スキームを導入し、近似解と近似自由境界の収束を変分不等式の理論と粘性解理論を用いて証明した。更に、投資問題に現れる放物型変分不等式に対する粘性解と自由境界の存在を証明した。

研究成果の概要 (英文)： We consider an approximation scheme for anisotropic curvature flow, arising from the image processing., and prove the convergence of this scheme. We also study the parabolic free boundary problems arising from mathematical finance. We introduce a time-discrete scheme for a parabolic variational inequality and obtain the convergences of approximate solutions and approximate free boundaries. We also prove the existence and uniqueness of solutions and of free boundary for an investment problem.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：非線形偏微分方程式、平均曲率流、粘性解、自由境界、数理ファイナンス

## 1. 研究開始当初の背景

平均曲率流は数学的な研究も盛んであるが、相転移理論、画像処理等への応用やそれらを目的とした数値計算法についても活発に研究されている。平均曲率流に対する数値計算法に関して、1992年に Bence, Merriman, Osher によって考案された、熱方程式を用いた平均曲率流の近似アルゴリズムはその簡明さから国内外の多くの研究者の注目を集め、その収束の証明や一般化が考察されてきた。

この中で我々は Bence - Merriman - Osher による近似アルゴリズムの収束、誤差評価、境界値問題への応用という成果を挙げてきた。

2001年には3次元空間において主法線方向にその曲率で動く曲線に対して Bence - Merriman - Osher アルゴリズムを拡張し、数値計算が行われた。これは、研究代表者の知る限り、余次元が2以上の平均曲率流に対する Bence - Merriman - Osher アルゴリズム

の最初の応用と思われ、数学的な研究はほとんど無いことから以下のような問題を考察する。

(i) 余次元の高い平均曲率流に対する近似問題

相転移理論等でよく扱われる界面運動はミクロレベルでモデル化した物理現象を極限操作によってマクロ的に記述したものである。1982年にはミクロとマクロの中間的な見方(メゾスコピックと呼ばれる)による界面運動モデルが提唱され、界面の運動方程式として確率的な外力を伴う平均曲率流方程式が導かれた。それ以来、確率平均曲率流に関する研究が始まったが、その中でYipは面積汎関数の最小化問題と確率微分同相写像を用いて、確率平均曲率流を構成した。これを動機として次のような問題を研究する。

(ii) 確率平均曲率流に対する近似問題

最初に述べた多くの結果により、Bence - Merriman - Osher アルゴリズムに対する基本的な研究はほぼ完成したと考えてよい。すると、このアルゴリズムで構成される平均曲率流の性質を調べるのが次の問題となる。このアルゴリズム

で構成される平均曲率流は、通常は広義解として捉えられる。しかし、平均曲率流に対する広義解の性質は未だによくわかっていない。また、広義解が厚みをもつ場合があり得ることが知られており、そのときには広義解の一意性が成り立たないことも知られている。そこで次のような問題を考える。

(iii) 平均曲率流の広義解に対する正則性・特異性

## 2. 研究の目的

平均曲率流に対する近似問題について研究し、それを用いて平均曲率流に対する広義解の性質を調べる

## 3. 研究の方法

### (1) 余次元の高い平均曲率流に対する近似問題

Bence - Merriman - Osher アルゴリズムの収束の証明には熱方程式の解に対する形式的な漸近展開を基にして粘性解理論、幾何学的測度論等を用いる。

### (2) 確率平均曲率流に対する近似問題

面積汎関数の最小化問題の代わりに、Bence - Merriman - Osher アルゴリズムに確率微分同相写像を組み合わせた近似スキームを考え、それが確率平均曲率流に収束することを証明する。Bence - Merriman - Osher アルゴリズムは熱方程式を用いるた

め、近似解が一意に求まるという点において、面積汎関数の最小化問題を用いる場合に比べて、格段に扱いやすいと思われる。収束の証明には幾何学的測度論や確率粘性解の概念を用いる。

### (3) 平均曲率流の広義解に対する正則性・特異性

Bence - Merriman - Osher アルゴリズムは熱方程式の初期値問題を用いるが、それを Gauss の誤差関数によって変換すると調和写像熱流と類似の構造をもった非線形偏微分方程式が現れる。調和写像熱流の解析手法と熱方程式の解の満たす評価を組み合わせることによって解の正則性・特異性について調べる。

## 4. 研究成果

画像処理に現れる変分問題を基にした非等方的曲率流に対する近似問題の収束について研究した。この近似問題は Bence - Merriman - Osher アルゴリズムと類似の性質を持っているが、熱方程式の基本解のような関数がないため、解析は困難である。しかし、Matheron のアイデアを用いて近似問題の収束が得られた。

先行研究として等方的な場合の収束についての研究があるが、それよりもよい収束が得られている。この結果は 2 次元画像に限らず、3 次元画像における輪郭抽出や輪郭補正等に应用できると考えられる。また、エネルギー密度を表す関数があり滑らかでない場合にも应用できると思われる。

数理ファイナンスにおいて、オプションの価格付けの問題に現れる放物型変分不等式に対して変分法を用いた時間離散近似を導入し、その近似解の収束の速さについて、ほぼ最良な評価を得た。また、近似自由境界の収束も得られた。後者に関しては先行研究もあまりないのでその意義は大きいと考えられる。変分法に

よる時間離散近似は従来の方法と比べて、自由境界が簡単に求まるので、今回の成果によって自由境界の数値計算法の進展が期待できる。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 15 件)

① Y. Naito and T. Sato, Non-homogeneous semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent, Ann. Mat. Pura Appl. (to appear).

② Y. Naito and S. Tanaka, Existence and

non-existence of sign-changing solutions for a class of two-point boundary value problems involving one-dimensional  $p$ -Laplacian, *Mathematica Bohemia* (to appear).

③ F. Takahashi, An eigenvalue problem related to the critical obolev exponent: variable coefficient case, *Differential Integral Equations* 23 (2010), 827--860, (査読有)

④ F. Takahashi, Spectral estimates of least energy solutions to the Brezis-Nirenberg problem with a variable coefficient, *J. Differential Equations* 248 (2010), 2497--2527, (査読有)

⑤ F. Takahashi, Non-degeneracy of least-energy solutions for an elliptic problem with nearly critical nonlinearity, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 140 (2010), 203--222, (査読有)

⑥ T. Sato and F. Takahashi, A nondegeneracy result for least energy solutions to a biharmonic problem with nearly critical exponent, *Mathematical analysis on the self-organization and self-similarity*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B15, 73--85, (2009) (査読有)

⑦ M. Kurokiba, F. Takahashi and T. Ogawa, Global existence of solutions for a nonlinearly perturbed Keller-Segel system in  $\mathbb{R}^2$ , *Z. Angew. Math. Phys.* 60 (2009), 840--866, (査読有).

⑧ T. Sato and F. Takahashi, Asymptotic uniqueness for a biharmonic equation with nearly critical growth on symmetric convex domains, *Funkcial. Ekvac.* 52 (2009), 213--232, (査読有)

⑨ M. Ishiwata, F. Takahashi and T. Ogawa, Existence of multiple solutions for a nonlinearly perturbed elliptic parabolic system in  $\mathbb{R}^2$ , *Electron. J. Differential Equations* 32 (2009), 10pp, (査読有)

⑩ M. Kuwamura and H. Chiba, Mixed-mode oscillations and chaos in a prey-predator system with dormancy of predators, *Chaos*

19 (2009), 043121, 10 pp, (査読有)

⑪ M. Kuwamura, T. Nakazawa and T. Ogawa, A minimum model of prey-predator system with dormancy of predators and the paradox of enrichment, *J. Math. Biol.* 58 (2009), no. 3, 459 - 479 (査読有)

⑫ M. Kuwamura, Deviation from the predicted wavenumber in a mode selection problem for the Turing patterns, *Japan J. Indust. Appl. Math.* 25 (2008), 281--303, (査読有)

⑬ T. Ishiwata, Motion of essential admissible polygons by crystalline curvature Nonlinear phenomena with energy dissipation, *GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl.*, 29, Gakkotosho., 201--210, (2008) (査読有)

⑭ T. Ishiwata, Motion of non-convex polygons by crystalline curvature and almost convexity phenomena, *Japan J. Indust. Appl. Math.* 25 (2008), 233--253, (査読有)

⑮ C. Hirota, T. Ishiwata and S. Yazaki, Numerical study and examples on singularities of solutions to anisotropic crystalline curvature flows of nonconvex polygonal curves, Asymptotic analysis and singularities-elliptic and parabolic PDEs and related problems, *Adv. Stud. Pure Math.*, 47-2, Math. Soc. Japan, Tokyo, 233--253, (2008) (査読有)

[学会発表] (計 12 件)

① K. Ishii, A time-discretization to the American option pricing, Nonlinear PDE seminar, April 14, 2010, Sapienza Universit' a di Roma, Italy

② K. Ishii, A time-discretization to the American option pricing, Nonlinear PDE seminar, April 16, 2010, Universita di Napoli, Italy

③ 桑村雅隆、仲澤剛史, Dormancy of predators dependent on the rate of variation in the prey density, 第20回日本数理生物学会大会, 2010年9月15日, 北海道大学.

④Y. Naito, Asymptotic behavior of solutions to the Cauchy problem for a semilinear heat equation, Nonlinear PDE seminar, August 30, 2010, Puan National University, Korea.

⑤Y. Naito, The role of self-similarity in the Cauchy problems for semilinear heat equations, The 4th Euro-Japanese Workshop on Blow-up, 6-10 September 2010, Lotentz Center, Leiden.

⑥内藤 雄基, 臨界 Sobolev 指数をもつ非斉次半線形楕円型偏微分方程式, 日本数学会 2010 年度秋期総合分科会, 2010 年 9 月 24 日, 名古屋大学

⑦K. Ishii, A time-discretization to the American option pricing, Second International Conference on Reaction - Diffusion systems and Viscosity solutions, July 13 - 18, 2009, Taichung, Taiwan

⑧石井 克幸, アメリカンオプションに対する近似問題について, 神戸大学解析セミナー, 2009 年 10 月 13 日, 神戸大学

⑨桑村 雅隆, 捕食者の休眠を伴う prey-predator 系について, 日本数学会 2009 年度秋期総合分科会応用数学分科会, 2009 年 9 月 25 日, 大阪大学

⑩Y. Naito, Self-similar blowup for a chemotaxis system, 09 International Workshop on Nonlinear PDE and Applications, 2009.6.29, Puan National Univ. Korea

⑪内藤雄基, Non-homogeneous semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent, 京都大学数理解析研究所研究集会「変分問題とその周辺」, 2009.6.9, 京都大学数理解析研究所

⑫Y. Naito, Blowup rate for a parabolic-elliptic system in higher dimensional domain, Equadiff 12 (2009), 2009.7.21, Brno, Czech Republic

[図書] (計 0 件)

[その他]  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

石井 克幸 (ISHII KATSUYUKI )  
神戸大学・大学院海事科学研究科・准教授  
研究者番号: 40232227

### (2) 研究分担者

丸尾 健二 (MARUO KENJI)  
神戸大学・大学院海事科学研究科・  
教授  
研究者番号: 90028225

内藤 雄基 (NAITO YUKI)  
愛媛大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号: 10231458

桑村 雅隆 (KUWAMURA MASATAKA)  
神戸大学・大学院人間環境発達学研究科・  
准教授  
研究者番号: 30281158

### (3) 連携研究者

高橋 太 (TAKAHASHI FUTOSHI )  
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 10374901

石渡 哲哉 (ISHIWATA TETSUYA)  
芝浦工業大学・システム理工学部・准教授  
研究者番号: 50334917

大沼 正樹 (OHMUNA MASAKI)  
徳島大学・ソシオ・アーツ・サイエンス研  
究部・准教授  
研究者番号: 90304500