

機関番号：17201

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20540120

研究課題名（和文） Chern-Simons 理論の確率論による新展開

研究課題名（英文） New Aspect of Probabilistic Approach to Chern-Simons Theory

研究代表者

三苦 至 (Mitoma Itaru)

佐賀大学・大学院工学系研究科・教授

研究者番号：40112289

研究成果の概要（和文）：Chern-Simons（チャーン・サイモンズ）全ラグランジアン³の汎関数積分をウィナー空間の設定で数学的に扱うために、スーパー・フィールドの方法で変形したラグランジアンに現れる無限行列式を含む3次の項を、共同研究者であるドイツのボン大学のアルベリオ教授や本学の物理学者の船久保教授の教示を受けて果敢な方法で正則化し、ウィナー空間上の汎関数として定式化した。ファインマン測度をウィナー測度を用いて定式化する伊藤の方法を変形して漸近剰余項の評価を行った。この理論を含むゲージ理論に関連するとして、揺らぎのある面の運動を集合値確率過程の立場から研究した。集合値確率積分を定義し、確率微分方程式について解の存在と一意性のある制約の下で証明した。制約を比喩的に言えば、クラゲの運動は捉えたがアメーバの運動を捉えるには至っていない。

研究成果の概要（英文）：To give a mathematical meaning to the Chern-Simons functional integral of its total Lagrangian in an abstract Wiener space setting, we regularize the 3rd terms including the infinite determinant appeared in the Lagrangian modified by the method of super fields, along the suggestions of my research colleague, Prof. Albeverio at the University of Bonn in Germany and Prof. Funakubo in my University, and give the mathematical definition as a Wiener functional. We did the estimate of the remainder terms in the asymptotic expansion by modifying the It^o method of defining the Feynman measure by using the Wiener measure. Concerning the Gauge theory including the Chern-Simons theory, we study the random surfaces from a view point of set-valued stochastic processes. After defining the set-valued stochastic integral, we get the existence and uniqueness for the solutions of a set-valued stochastic differential equation under some restriction. Metaphorically speaking the restriction in a word, we catch the motion of a jellyfish but not of an ameba.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：(1) Chern-Simons 理論 (2) 抽象ウィナー空間 (3) ホロノミー (4) 漸近展開 (5) スーパー・フィールド (6) 量子不変量 (7) 超対称的場の量子論 (8) 集合値確率積分

1. 研究開始当初の背景

(1) E.Witten (ウィッテン) による Chern-Simons 汎関数積分の物理的考察による 1989 年の有名な論文は、表現論など積分以外の数学によって正当化されたが、本来の積分という概念からは何一つ正当化されてはいない。研究代表者は、果敢にも無限次元確率解析という積分を基礎にした解析を使って積分計算による正当化を試みようとして研究を 10 年以上前にスタートさせた。当時このような試みをやっていたのは世界でドイツのボン大学教授であったアルベリオ氏以外にはいなかった。研究代表者は問題を 3 次元多様体の接続のなす抽象ウィナー空間上に設定することから始めた。東大の河野教授の Vassiliev 不変量を反復積分で書かれている仕事を見て、披積分関数として現れるホロノミーを反復積分で定式化した。この時、コンパクト・ポアンカレ双対の構成が問題となったが、東北大学の西川教授の助けで乗りきり、Chern-Simons 積分の 1 ループ近似については、それをウィナー空間上に設定し、その漸近展開を得て世界的雑誌である J.Funct.Anal. に 2007 年に発表した。

(2) 研究代表者は、本学の小倉教授(当時)が北京工業大学の李教授とファジー値確率変数についてさまざまに研究されていたことを間近に見ることが出来た。平成 18 年に中国からの博士後期課程の留学生の指導をこの分野に関連する集合値確率積分から開始した。

2. 研究の目的

(1) 残っている問題は、指数 3 乗の項が現れる全 Chern-Simons ラグランジアンに対する汎関数積分をウィナー空間の設定で取り扱うことである。物理学者の常套手段である摂動展開の方法が漸近展開として数学的に正当化されれば、物理学者が行っていた展開係数の計算がそのままの形で数学的に厳密化され、理解が容易になるだけでなく新しい理論の創設を生むかもしれない。

(2) 集合値確率微分方程式の理論が完成すれば、面の揺らぎのある運動の解析が可能となり、界面の運動やゲージ理論の完成に必要なといわれる面の運動を捉えることが出来る。元来ファジー値確率過程の切り口の運動である集合値確率過程の解析が進めば、ファイナンスやファジー制御への応用の飛躍が期待される。

3. 研究の方法

(1) Chern-Simons 汎関数積分は、ファイマン積分であり、21 世紀初頭の今でも無限次元空間上のルベーグ測度論は数学に

存在しない。代わって、数学的に存在するのが確率測度論であり、1980 年代以降、確率論の数学における重要な存在価値となっている。無限次元確率解析の手法が積分という観点から準備できる唯一の数学的手段であり、研究代表者の専門でもある。そこで、日本で無限次元確率解析をもっとも活発に研究されている東北大学の会田教授や九州大学の谷口教授の研究協力を得て、研究代表者が、Chern-Simons 理論における幻想ルベーグ積分の形式論に、確率論的方法によって数学的厳密化を図ることがこの研究の一つの大きな方法論の特色である。このような試みは国内外の数学の世界のどこにもなく、唯一我々の研究方法に近い研究はドイツのボン大学のアルベリオ教授のグループによってなされているにすぎない。ここ 10 年くらいは、アルベリオ教授の示唆による「償いの方法」の数学的正統化をこころみている。

(2) 他の一つは、世界で初めて、集合値確率微分方程式なるものの研究を始めたわれわれが更なる発展を図る点である。

集合値確率過程はファジー理論との関連で、15 年来の友人である中国の北京工業大学の李教授、佐賀大学の小倉名誉教授、ポーランドのキーシエルビッツ教授などが東北大学の日合教授、東工大の梅垣教授の先駆的研究を進展させてきた。研究代表者は、これらの発展を間近に見る位置にあって、面の運動への応用の可能性に着目した。前述の李教授、代表者のもとで博士の学位を取り現在は中国の華北電力大学に職を得ている張女史、ファジー理論を活発に研究されている近隣の九工大の岡崎教授の協力を得て、研究代表者が集合値確率積分や集合値確率微分方程式を、その数学的制約が本質的かどうかに関心を払いながら、また界面の運動などへの応用にも気を配って、発展的に研究を進める点が方法論の概観的特徴である。方法論的には、李-小倉両氏のそれと同じ流れにあるが、彼らが集合値確率変数列の解析を中心としていたのに比して、われわれは集合値伊藤過程の研究を中心としている点が新しいといえる。

4. 研究成果

(1) Chern-Simons 積分に関する漸近展開の難点は、披積分関数の指数 3 乗の項の処理で、最も期待されると研究代表者が考え、研究継続中の方法は、停留位相法の無限次元化である。これによって、漸近展開が有限次元と同じ原理でできないかと言う点である。しかしながら、ファイマン積分を伊藤の方法によってウィナー測度から実現

する立場では、現在のところこの難点を克服できていない。そこで、伊藤の方法の実現において漸近展開のパラメータ k とファインマン測度実現のパラメータ n が関係しながら無限大に近づくという果敢な設定で、さらにアルベリオ教授の Chern-Simons 積分を位相関数の Chern-Simons 積分で割るという「上下積分の償い」のアイデアを併せて、漸近剰余の評価を抽象ウィナー空間上で数学的に設定し、有限次元と同じような漸近剰余の評価が成り立つパラメータ達の関係を求めた。この結果はフランスの著名な雑誌に発表された。数理論理の方法を代表者にご教示くださった本学の船久保教授にこの場を借りて感謝申し上げます。

(2) 上記試みとは、趣を異にするが、ゲージ理論や界面の運動への応用を見込んで、面の運動を、集合値確率過程の立場から、中国華北電力大学の張講師、近隣の九州工業大の岡崎教授とともに研究している。まず集合値確率積分の可能性について研究した。揺動項は実ブラウン運動の微分とした。研究代表者が偶然にも平成16年12月に CNRS で出会ったイギリスの Brzezniak 教授達が用いていたある種のバナッハ空間上では定義できることを示した。この結果はいわゆる Bellman Journal に発表された。さらに集合値確率微分方程式の研究に進んだ。先にクラゲの運動は捉えたが、アメーバの運動は捉えられていないと書いたが、それは面に沿った方向に random に揺動することは一般に出来ないような兆候があるからである。面に交わる方向に揺動した確率微分方程式について解の存在と一意性を通常のリプシッツ条件のもとで証明した。この結果は東北数学雑誌に発表された。この結果をバナッハ空間値ブラウン運動の微分が揺動項の場合に拡張した。この面に交わる方向の揺動についての最終結果はアメリカの新しい雑誌に発表された。

(3) 分担者の市川教授のリーマン面の研究は、Chern-Simons 理論がその創始者である E. Witten (ウィッテン) によって定式化された共形場理論と密接に関係するし、面を特殊化して面の確率積分を定義する際の上記の難点を克服するためにも必要である。この科研費の期間に挙げた成果の中から Siegel (ジーゲル) 保形形式の合同に関する結果を含めた2編と九州大学の吉田教授との共著1編を挙げるにとどめる。いずれも世界的に著名な数学雑誌に掲載された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

- ① Itaru Mitoma, Yoshiaki Okazaki, Jinping Zhang, Set-valued stochastic differential equation in M-type 2 Banach space, Commun. Stoch. Anal. 査読有, 4, 215-237 (2010).
- ② Nobuyuki Ikeda, Setsuo Taniguchi, The Itô-Nishio theorem, quadratic Wiener functionals, and 1-solitons, Stoch. Proc. Appl., 査読有, 120, 605-621, (2010).
- ③ Jinping Zhang, Shoumei Li, Itaru Mitoma, Yoshiaki Okazaki, On the solutions of set-valued stochastic differential equations in M-type 2 Banach spaces, Tohoku Math. J. 査読有, 61, 417-440 (2009).
- ④ Sergio Albeverio, Itaru Mitoma, Asymptotic expansion of perturbative Chern-Simons theory via Wiener space, Bull. Sci. Math., 査読有, 133, 272-314 (2009).
- ⑤ Jinping Zhang, Shoumei Li, Itaru Mitoma, Yoshiaki Okazaki, On set-valued stochastic integrals in an M-type 2 Banach space, J. Math. Anal. Appl., 査読有, 350, 216-233 (2009)
- ⑥ Takashi Ichikawa, Siegel modular forms of degree 2 over rings, J. Number Theory, 査読有, 129, 818-823 (2009)
- ⑦ Shigeki Aida, Semi-classical limit of the lowest eigenvalue of a Schroedinger operator on Wiener space, II, J. Funct. Anal. 査読有, 256, 3342-3367 (2009).
- ⑧ Shigeki Aida, Semi-classical limit of the lowest eigenvalue of a Schroedinger operator on a Wiener space, I, Asterisque, 査読有, 327, 1-16 (2009).
- ⑨ Takashi Ichikawa, Congruence between Siegel modular forms, Math. Ann. 査読有, 342, 527-532 (2008)
- ⑩ Setsuo Taniguchi, Quadratic Wiener

functionals of square norms on measure spaces, Communi. Stoch. Anal., 査読有, 2, 11-26, (2008).

[学会発表] (計 2 件)

- ① Jinping Zhang, Itaru Mitoma, Yoshiaki Okazaki, Set-valued Stochastic Differential Equations in M-type 2 Banach Spaces, 日本数学会秋季例会, 2010年9月21日, 名古屋大学
- ② 三苫至, Chern-Simons perturbation theory via Wiener space setting, 研究集会「確率解析の理論と応用—さよなら箱崎」2009年7月24日, 九州大学

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

三苫 至 (Mitoma Itaru)
佐賀大学・大学院工学系研究科・教授
研究者番号: 40112289

(2) 研究分担者

市川尚志 (Ichikawa Takashi)
佐賀大学・大学院工学系研究科・教授
研究者番号: 20201923

(3) 研究分担者

半田賢司 (Handa Kenji)
佐賀大学・大学院工学系研究科・准教授
研究者番号: 10238214

(4) 連携研究者

谷口説男 (Taniguchi Setsuo)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号: 70155208

(5) 連携研究者

会田茂樹 (Aida Shigeki) 東北大学
大学院理学研究科・教授
研究者番号: 90222455